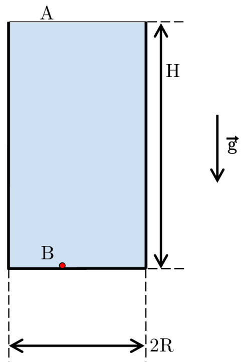
Challenge 6, Hydrodynamik: Lösung

Hydrodynamics 8 pt.

Teil A. Löchriger Zylinder 4 pt.

Im folgenden betrachten wir einen Zylinder mit Höhe H und Durchmesser $2R$, der sich an einem Ort befindet wo Normdruck P_{atm} und Erdbeschleunigung g gelten. Zu Beginn ist der Zylinder randvoll mit einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt.



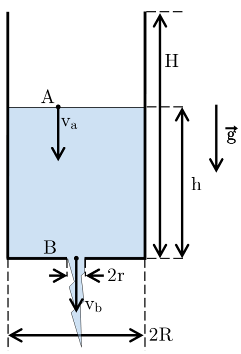
i. Bestimme den absoluten Druck P_b am Boden des Zylinders (Punkt B). **1 pt.**

The pressure at the bottom of the cylinder is given by

$$P_b = \rho g h + P_{atm}$$

-0.25 points if one forgets P_{atm}. 1 pt.

Zum Zeitpunkt t_0 wird eine Öffnung mit Durchmesser $2r$ in den Boden des Zylinders gestochen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $r \ll R$.



ii. Bestimme die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsoberfläche im Zylinder (v_a) als Funktion der Geschwindigkeit der Flüssigkeit, die durch die Öffnung geht (v_b), für eine Zeit $t > t_0$. **1 pt.**

Since the velocity in the cylinder is constant we can use the continouity equation

$$v_a \pi R^2 = v_b \pi r^2$$

0.5 pt.

Solving for v_a gives

$$v_a = v_b \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

0.5 pt.

iii. Finde einen Ausdruck für die Geschwindigkeit am Ausgang der Öffnung v_b als Funktion der Höhe h an Flüssigkeit im Zylinder unter Berücksichtigung der in der Aufgabenstellung angegebenen Hypothesen. **2 pt.**

Since $r \ll R$ we see that v_a is small compared to v_b. This means the water level in the cylinder almost remains constant. 0.5 pt.

This means we can apply the Bernoulli equation between the water surface in the cylinder and the hole at point B

$$\frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g h + P_{atm} = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + P_{atm}$$

0.5 pt.

Solving for v_b gives

$$v_b = \sqrt{2gh + v_a^2}$$

0.5 pt.

Since $v_a \ll v_b$, because $r \ll R$ we obtain

$$v_b = \sqrt{2gh}$$

0.5 pt.

Alternative solution:
Let $E_{pot}(h)$ and $E_{pot}(h - dh)$ be the potential energies of the water in the cylinder for a water line at h respectively $h - dh$

$$E_{pot}(h) = \frac{\pi R^2 \rho g h^2}{2}$$

$$E_{pot}(h-dh) = \frac{\pi R^2 \rho g (h-dh)^2}{2}$$

The difference in volume for these two cases is $\Delta V = \pi R^2 dh$. This is also the volume which leaves the cylinder through the hole. This means the potential energy of the water is transformed into kinetic energy. Since we have $v_a \ll v_b$ we can neglect the kinetic energy of the water in the cylinder and we get

$$E_{cin} = E_{pot}(h) - E_{pot}(h-dh)$$

$$g\pi R^2 \rho \left(dh + \frac{dh^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho \pi R^2 dh v_b^2$$

We consider only the terms linear in dh and solve for v_b

$$v_b = \sqrt{2gh}$$

Teil B. Loch im Schwimmbecken *4 pt.*

Blaise hat in seinem Garten ein neues Schwimmbecken entworfen und aufgestellt. Das Becken ist ein perfekter Zylinder, das auf dem Boden aufgestellt ist, mit folgenden Dimensionen: Durchmesser 1 m und Höhe 1.5 m. Blaise füllt das Becken vollständig mit Wasser.

i. Evangelista, Blaises kleiner Bruder, bohrt ein Loch in die Wand des Beckens in der Höhe h über dem Boden, woraufhin das Wasser hinauszufliessen beginnt. Mit welcher Geschwindigkeit fliesst das Wasser aus dem Loch? Begründe mit einer Rechnung. **2 pt.**

The Bernoulli equation in this case reads

$$\frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g h_a + p_a = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h_b + p_b$$

1 pt.

Further we can make the following assumption $p_a \approx p_b \approx p_{atm}$ and $v_a \approx 0$. 0.5 pt.

With this assumptions the Bernoulli equation reads

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h$$

solving for v_b gives

$$v_b = \sqrt{2g(H-h)}$$

0.5 pt.

ii. Welche horizontale Distanz (vom Loch aus) hat ein Wassertropfen zurückgelegt, wenn er den Boden berührt? **1 pt.**

From cinematics we get

$$x(t) = v_b t$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

When the water drop touches the ground we have $y(t) = 0$. Solving the second equation for t we get

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

0.5 pt.

With the result from i. we get

$$x = 2\sqrt{h(H-h)}$$

0.5 pt.

iii. In welcher Höhe über dem Boden müste Evangelista ein Loch bohren, sodass der Tropfen die weitest mögliche horizontale Distanz vom Loch aus zurücklegt, bis er auf dem Boden auftritt? **1 pt.**

From ii. we know the dependency of the distance x from h: $x(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$. For the h_{max}, which maximizes x we have

$$x'(h_{max}) = 0$$

0.5 pt.

The derivative is

$$x'(h) = \frac{(H-2h)}{\sqrt{h(H-h)}} = 0$$

Solving for h gives

$$h = \frac{H}{2}$$

0.5 pt.