

## Challenge 6, Hydrodynamique: Solution

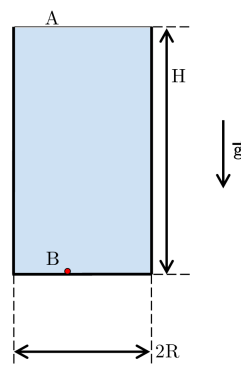
### Hydrodynamics

**8 pt.**

#### Partie A. Cylindre troué

**4 pt.**

Soit un cylindre de hauteur  $H$  et de diamètre  $2R$ , placé dans une pièce où règnent la pression atmosphérique  $P_{atm}$  ainsi que l'accélération terrestre  $g$ . Le cylindre est rempli à raz-bord par un liquide parfait, incompressible et de masse volumique  $\rho$ .



i. Déterminez la pression absolue  $P_b$  régnant au fond du cylindre (point B).

**1 pt.**

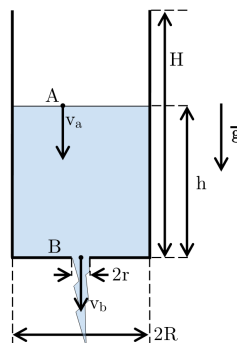
The pressure at the bottom of the cylinder is given by

$$P_b = \rho gh + P_{atm}$$

-0.25 points if one forgets  $P_{atm}$ .

**1 pt.**

A l'instant  $t_0$ , on perce un trou de diamètre  $2r$  dans le fond du cylindre. Pour simplifier le problème, on suppose que  $r \ll R$ .



ii. Pour un temps  $t > t_0$ , exprimez la vitesse de la surface du liquide dans le cylindre ( $v_a$ ) en fonction de la vitesse du liquide passant au travers du trou ( $v_b$ ).

---

**1 pt.**

Since the velocity in the cylinder is constant we can use the continuity equation

$$v_a \pi R^2 = v_b \pi r^2$$

---

0.5 pt.

Solving for  $v_a$  gives

$$v_a = v_b \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

---

0.5 pt.

iii. En tenant bien compte des hypothèses de l'énoncé, exprimez la vitesse du liquide à la sortie du trou  $v_b$  en fonction de la hauteur  $h$  de liquide dans le cylindre.

---

**2 pt.**

Since  $r \ll R$  we see that  $v_a$  is small compared to  $v_b$ . This means the water level in the cylinder almost remains constant.

---

0.5 pt.

This means we can apply the Bernoulli equation between the water surface in the cylinder and the hole at point B

$$\frac{1}{2} \rho v_a^2 + \rho g h + P_{atm} = \frac{1}{2} \rho v_b^2 + P_{atm}$$

---

0.5 pt.

Solving for  $v_b$  gives

$$v_b = \sqrt{2gh + v_a^2}$$

---

0.5 pt.

Since  $v_a \ll v_b$ , because  $r \ll R$  we obtain

$$v_b = \sqrt{2gh}$$

---

0.5 pt.

*Alternative solution :*

Let  $E_{pot}(h)$  and  $E_{pot}(h - dh)$  be the potential energies of the water in the cylinder for a water line at  $h$  respectively  $h - dh$

$$E_{pot}(h) = \frac{\pi R^2 \rho g h^2}{2}$$

$$E_{pot}(h - dh) = \frac{\pi R^2 \rho g (h - dh)^2}{2}$$

The difference in volume for these two cases is  $\Delta V = \pi R^2 dh$ . This is also the volume which leaves the cylinder through the hole. This means the potential energy of the water is transformed into kinetic energy. Since we have  $v_a \ll v_b$  we can neglect the kinetic energy of the water in the cylinder and we get

$$E_{cin} = E_{pot}(h) - E_{pot}(h - dh)$$

$$g\pi R^2 \rho \left( dh + \frac{dh^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 dh v_b^2$$

We consider only the terms linear in  $dh$  and solve for  $v_b$

$$v_b = \sqrt{2gh}$$

#### Partie B. De la fuite dans les idées

4 pt.

Blaise a construit une nouvelle piscine dans son jardin et l'a conçue lui-même. La piscine est un cylindre parfait reposant sur le sol (horizontal), avec les dimensions suivantes : un diamètre de 1 m et une hauteur de 1.5 m. Blaise remplit la piscine jusqu'au sommet avec de l'eau.

i. Evangelista, le petit frère de Blaise, perce un trou sur la paroi de la piscine à une hauteur  $h$  depuis le sol, et de l'eau commence donc à s'échapper. A quelle vitesse sort l'eau depuis le trou ? Justifiez votre réponse avec un calcul approprié.

2 pt.

The Bernoulli equation in this case reads

$$\frac{1}{2} \rho v_a^2 + \rho g h_a + p_a = \frac{1}{2} \rho v_b^2 + \rho g h_b + p_b$$

1 pt.

Further we can make the following assumption  $p_a \approx p_b \approx p_{atm}$  and  $v_a \approx 0$ .

0.5 pt.

With this assumptions the Bernoulli equation reads

$$\rho g H = \frac{1}{2} \rho v_b^2 + \rho g h$$

solving for  $v_b$  gives

$$v_b = \sqrt{2g(H - h)}$$

0.5 pt.

**ii. Quelle distance horizontale (depuis le trou) atteint une goutte d'eau au moment où elle touche le sol ?**

**1 pt.**

From cinematics we get

$$x(t) = v_b t$$
$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

When the water drop touches the ground we have  $y(t) = 0$ . Solving the second equation for  $t$  we get

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

0.5 pt.

With the result from i. we get

$$x = 2\sqrt{h(H-h)}$$

0.5 pt.

**iii. A quelle hauteur (depuis le sol) Evangelista devrait-il faire un trou de sorte à ce qu'une goutte d'eau ait parcouru la distance horizontale maximum depuis le trou au moment de toucher le sol ?**

**1 pt.**

From ii. we know the dependency of the distance  $x$  from  $h$ :  $x(h) = 2\sqrt{h(H-h)}$ . For the  $h_{max}$ , which maximizes  $x$  we have

$$x'(h_{max}) = 0$$

0.5 pt.

The derivative is

$$x'(h) = \frac{(H-2h)}{\sqrt{h(H-h)}} = 0$$

Solving for  $h$  gives

$$h = \frac{H}{2}$$

0.5 pt.