Challenge 1, Mecanique: Solution

Le long des rails *16 pt.*

Soit un train, le G511, qui voyage entre Pékin et Wuhan. Il met un temps T de 5 heures et 15 minutes pour parcourir la distance D de $1233\,\mathrm{km}$ du voyage avec une vitesse de croisière v_c de $300\,\mathrm{kmh^{-1}}$. Entre le départ et l'arrivée il y a 6 arrêts dont les temps respectifs sont 4, 5, 5, 6, 4 et 3 minutes (nommez les t_{si} avec $i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Notre objectif est d'estimer l'accélération a_T du train à l'aide de ces données.

Veuillez répondre algébriquement à toutes les questions sauf indication contraire.

Partie A. Sifflez le départ *2 pt.*

Pour partir sur de bonnes bases clarifions quelques points.

i. Quelle est la vitesse moyenne à laquelle le train se déplace durant le voyage ? **1 pt.**

It is equal to the total distance divided by the total time minus the time spent at stations.

$$v_{average} = \frac{D}{T - \sum t_i}$$

1 pt.

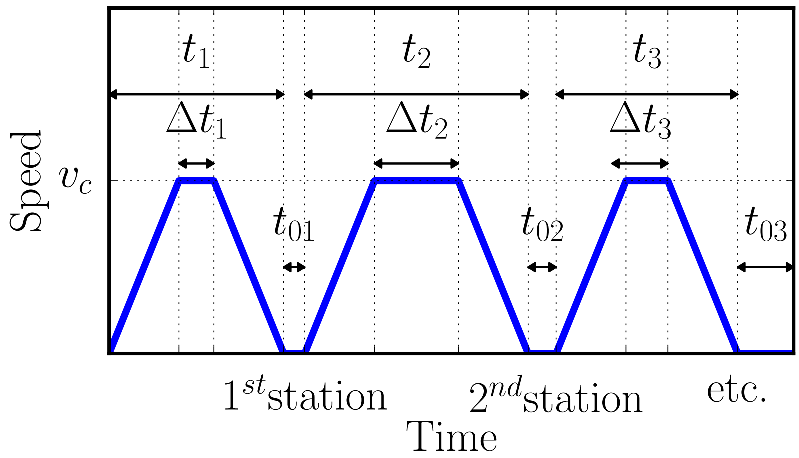
ii. Expliquez pourquoi cette dernière est différente de la vitesse de croisière v_c. **1 pt.**

The cruise speed is the speed which is reached after acceleration, so the train usually doesn't travel at that speed, therefore the average speed is lower than the cruise speed. NB : these two questions are here to make sure the students understand what cruise speed is, and instead of giving it to them I introduce that with a question. 1 pt.

Partie B. Plan de voyage *6 pt.*

Supposez que le train peut atteindre sa vitesse de croisière pendant un temps non nul entre chaque stations. ***Utilisez les valeurs algébriques des différentes variables pour illustrer les différentes parties de vos graphes. Vous pouvez utiliser par exemple t_i pour les temps de départ à chaque stations (avec $t_0 = 0$ et $t_8 = T$).***

i. Esquissez un graphe de la vitesse du train en fonction du temps pour les trois premières stations. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

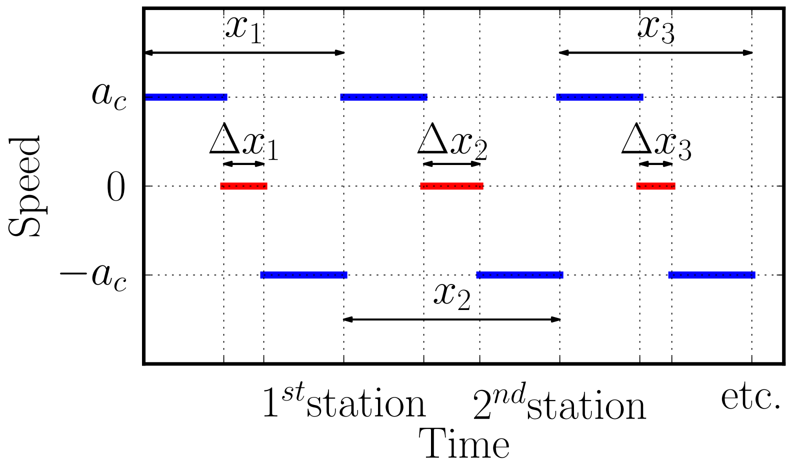
Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here t_i is the time of departure from station i, Δt_i is the time during which the train is at its cruise speed between stations $i-1$ and i. At station i the train spend a time t_{0i}. whenever the train is accelerating or decelerating the time elapsed will be called Δt

ii. Esquissez un graphe de l'accélération a_T du train en fonction de la distance pour les trois premières stations. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here x_i is the distance between station i and the departure station, Δx_i is the distance covered by the train at its cruise speed between stations $i-1$ and i. Whenever the train is accelerating or decelerating the distance travelled will be called Δx

Partie C. En route *8 pt.*

Supposez maintenant qu'entre deux stations le train accélère et décélère de la même manière avec une accélération $\pm a_T$. L'hypothèse de la partie B est toujours valide.

i. Exprimez la distance entre deux stations adjacentes $x_{i+1} - x_i$ en fonction de l'accélération a_T, de la vitesse de croisière v_c et de la distance sur laquelle le train voyage à sa vitesse de croisière *(Trouvez un nom adéquat pour cette dernière variable)*. **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained by combining

$$x(t) = \frac{1}{2}a_T t^2$$

and

$$v(t) = at$$

1 pt.

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta x = \frac{v_c^2}{2a_T}$$

1 pt.

therefore the distance $x_{i+1} - x_i$ is given by

$$x_{i+1} - x_i = 2\Delta x + \Delta x_{i+1} = \frac{v_c^2}{a_T} + \Delta x_{i+1}$$

1 pt.

ii. Exprimez le temps entre les départs de deux station adjacentes $t_{i+1} - t_i$ en fonction de l'accélération a_T, de la vitesse de croisière v_c, de la distance sur laquelle le train voyage à sa vitesse de croisière et du temps d'arrêt à chaque station. **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained simply with

$$v(t) = at$$

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta t = \frac{v_c}{a_T}$$

1 pt.

therefore the time $t_{i+1} - t_i$ is given by

$$t_{i+1} - t_i = 2\Delta t + \Delta t_{i+1} + t_{si+1} = \frac{2v_c}{a_T} + \Delta t_{i+1} + t_{si+1}$$

2 pt.

iii. Trouvez l'accélération du train. ***Donnez d'abord une réponse algébrique avant l'application numérique.*** **2 pt.**

We are given the total time T and the total distance D of the travel, we can sum up the individual components computed in the previous part and equate them to the latter.

$$D = \sum_{i=0}^{N}(x_{i+1} - x_i) = \frac{Nv_c^2}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$$

0.5 pt.

$$T = \sum_{i=0}^{N}(t_{i+1} - t_i) = \frac{2Nv_c}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1} + \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

We can calculate the value of $Tv_c - D$ to get rid of the sums $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$ and $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1}$

$$Tv_c - D = \frac{Nv_c^2}{a_T} + v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

as indeed the relation $\Delta t_{i+1} v_c = \Delta x_{i+1}$ is valid for every i. This yields the following result

$$a_T = \frac{Nv_c^2}{Tv_c - D - v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}}$$

0.25 pt.

Numerical application with $N = 7$

$$\frac{7(300\,\mathrm{kmh^{-1}})^2}{(5.25\,\mathrm{h})(300\,\mathrm{kmh^{-1}}) - 1233\,\mathrm{km} - (300\,\mathrm{km/h})(0.45\,\mathrm{h})} =$$

$$= 3043.48\,\mathrm{kmh^{-}2} = 0.235\,\mathrm{ms^{-2}} = a_T$$

0.25 pt.