Challenge 1, Meccanica: Soluzioni

Lungo i binari *16 pt.*

Si consideri il treno G511, che viaggia da Pechino e Wuhan. Esso impiega il tempo T di 5 ore e 15 minuti per percorrere la distanza D $1233\,\mathrm{km}$ del viaggio con una velocità media di crociera v_c di $300\,\mathrm{km h^{-1}}$. Tra partenza e arrivo ci sono 6 fermate delle durate rispettive di 4, 5, 5, 6, 4 e 3 minuti (indicatele con t_{si} con $i \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Il nostro obiettivo è di stimare l'accelerazione a_T grazie a questi dati.

Vogliate rispondere algebricamente alle domande salvo indicazione contraria.

Parte A. Fischio di partenza *2 pt.*

Per partire con delle buone basi, chiariamo alcuni punti.

i. Qual è la velocità media con cui si muove il treno durante il viaggio? **1 pt.**

It is equal to the total distance divided by the total time minus the time spent at stations.

$$v_{average} = \frac{D}{T - \sum t_i}$$

1 pt.

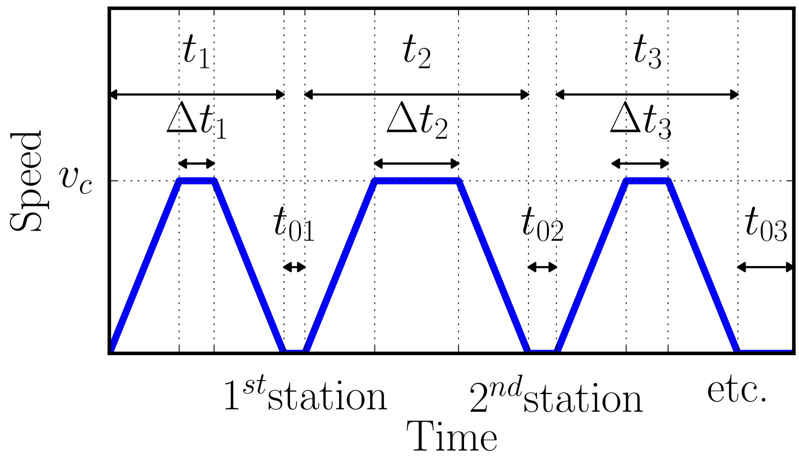
ii. Spiegate perché questa è diversa dalla velocità di crociera v_c. **1 pt.**

The cruise speed is the speed which is reached after acceleration, so the train usually doesn't travel at that speed, therefore the average speed is lower than the cruise speed. NB : these two questions are here to make sure the students understand what cruise speed is, and instead of giving it to them I introduce that with a question. 1 pt.

Parte B. Piano di viaggio *6 pt.*

Si consideri che, tra due stazioni, il treno raggiunga la velocità di crociera in un tempo non nullo. *Utilizzate valori algebrici delle diverse variabili per illustrare i vostri grafici. Potete utilizzare, per esempio, ti per indicare i tempi di partenza a ciascuna stazione (con $t_0 = 0$ e $t_8 = T$).*

i. Esprimete con un grafico la velocità del treno in funzione del tempo per le prime tre stazioni. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

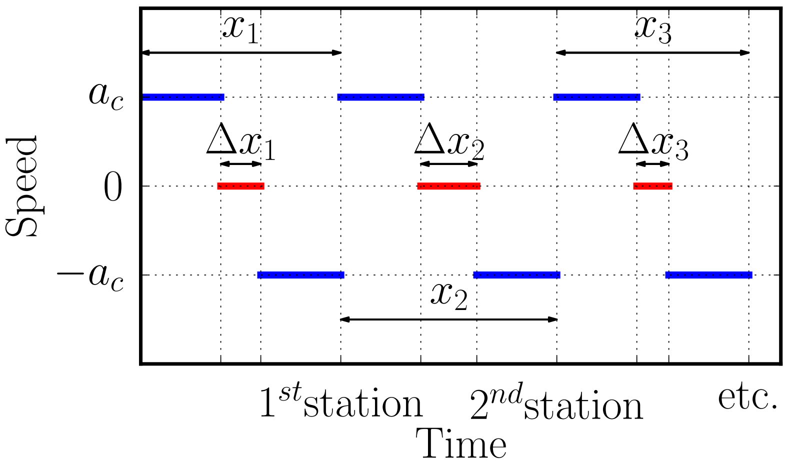
Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here t_i is the time of departure from station i, Δt_i is the time during which the train is at its cruise speed between stations $i-1$ and i. At station i the train spend a time t_{0i}. whenever the train is accelerating or decelerating the time elapsed will be called Δt

ii. Esprimete con un grafico l'accelerazione a_T del treno in funzione del tempo per le prime tre stazioni. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here x_i is the distance between station i and the departure station, Δx_i is the distance covered by the train at its cruise speed between stations $i-1$ and i. Whenever the train is accelerating or decelerating the distance travelled will be called Δx

Parte C. In viaggio *8 pt.*

Supponete ora che tra due stazioni il treno acceleri e deceleri nello stesso modo con accelerazione di valore $\pm a_T$. L'ipotesi formulata nella parte B è ancora valida.

i. Esprimete la distanza tra due stazioni adiacenti $x_{i+1} - x_i$ in funzione dell'accelerazione a_T, della velocità di crociera v_c e della distanza nella quale il treno viaggia alla velocità di crociera. *(Indicate con un nome adeguato questa variabile).* **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained by combining

$$x(t) = \frac{1}{2}a_T t^2$$

and

$$v(t) = at$$

1 pt.

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta x = \frac{v_c^2}{2a_T}$$

1 pt.

therefore the distance $x_{i+1} - x_i$ is given by

$$x_{i+1} - x_i = 2\Delta x + \Delta x_{i+1} = \frac{v_c^2}{a_T} + \Delta x_{i+1}$$

1 pt.

ii. Esprimete il tempo tra la partenza di due stazioni adiacenti $t_{i+1} - t_i$ in unzione dell'accelerazione a_T, della velocità di crociera v_c, della distanza nella quale il treno viaggia a velocità di crociera e del tempo di fermata a ciascuna stazione. **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained simply with

$$v(t) = at$$

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta t = \frac{v_c}{a_T}$$

1 pt.

therefore the time $t_{i+1} - t_i$ is given by

$$t_{i+1} - t_i = 2\Delta t + \Delta t_{i+1} + t_{si+1} = \frac{2v_c}{a_T} + \Delta t_{i+1} + t_{si+1}$$

2 pt.

iii. Trovare l'accelerazione del treno. *Dare prima una risposta algebrica e poi il valore numerico.* **2 pt.**

We are given the total time T and the total distance D of the travel, we can sum up the individual components computed in the previous part and equate them to the latter.

$$D = \sum_{i=0}^{N}(x_{i+1} - x_i) = \frac{Nv_c^2}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$$

0.5 pt.

$$T = \sum_{i=0}^{N}(t_{i+1} - t_i) = \frac{2Nv_c}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1} + \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

We can calculate the value of $Tv_c - D$ to get rid of the sums $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$ and $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1}$

$$Tv_c - D = \frac{Nv_c^2}{a_T} + v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

as indeed the relation $\Delta t_{i+1} v_c = \Delta x_{i+1}$ is valid for every i. This yields the following result

$$a_T = \frac{Nv_c^2}{Tv_c - D - v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}}$$

0.25 pt.

Numerical application with $N = 7$

$$\frac{7(300\,\mathrm{kmh}^{-1})^2}{(5.25\,\mathrm{h})(300\,\mathrm{kmh}^{-1}) - 1233\,\mathrm{km} - (300\,\mathrm{km/h})(0.45\,\mathrm{h})} =$$

$$= 3043.48\,\mathrm{kmh}^{-}2 = 0.235\,\mathrm{ms}^{-2} = a_T$$

0.25 pt.