Challenge 1, Mechanik: Lösung

Fahrplan *16 pt.*

Der Zug der Linie G511 verbindet Peking und Wuhan. Er benötigt für die Distanz D von $1233\,\mathrm{km}$ eine Zeit T von 5 Stunden und 15 Minuten. Dabei erreicht er eine Reisegeschwindigkeit v_c von $300\,\mathrm{km h^{-1}}$. Der Zug legt unterwegs 6 Zwischenstopps ein. Diese dauern 4, 5, 5, 6, 4 und 3 Minuten (benutze für diese Werte die Variablen t_{si} mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$). Unser Ziel ist es, mit diesen Angaben die Beschleunigung a_T des Zugs abzuschätzen.

Falls nicht explizit anders verlangt, gib für die gefragten Grössen nur die Formel und nicht das numerische Resultat an.

Teil A. Vor der Abfahrt *2 pt.*

Wir klären zuerst ein paar einfache Punkte:

i. Mit welcher Geschwindigkeit ist der Zug im Schnitt unterwegs? **1 pt.**

It is equal to the total distance divided by the total time minus the time spent at stations.

$$v_{average} = \frac{D}{T - \sum t_i}$$

1 pt.

ii. Erkläre, warum diese Geschwindigkeit kleiner ist als die Reisegeschwindigkeit v_c. **1 pt.**

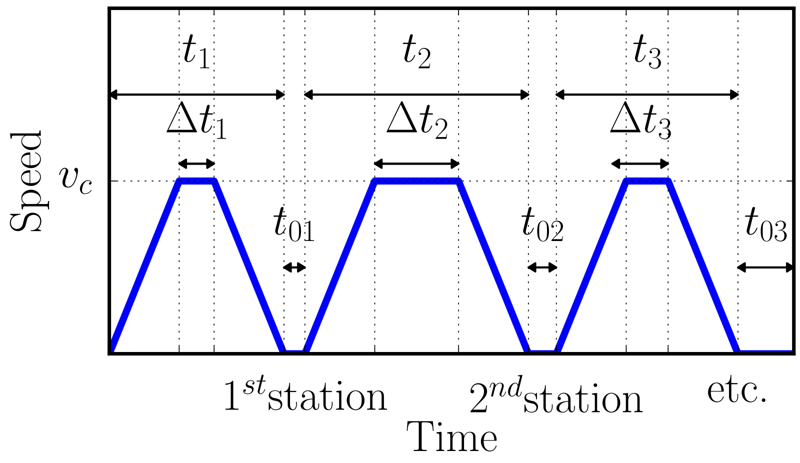
The cruise speed is the speed which is reached after acceleration, so the train usually doesn't travel at that speed, therefore the average speed is lower than the cruise speed. NB : these two questions are here to make sure the students understand what cruise speed is, and instead of giving it to them I introduce that with a question. 1 pt.

Teil B. Der Reiseplan *6 pt.*

Nimm an, dass der Zug die Reisegeschwindigkeit v_c auf allen Teilstrecken erreicht.

Benutze die oben eingeführten Variablen, um die verschiedenen Teile der Graphen zu kennzeichnen. Führe, falls du möchtest, eigene Variablen ein. Z.B. kannst du die Abfahrtszeiten bei den Zwischenstationen mit t_i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ kennzeichnen.

i. Skizziere einen Graph der Geschwindigkeit des Zugs als Funktion der Zeit bis zur dritten Zwischenstation. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

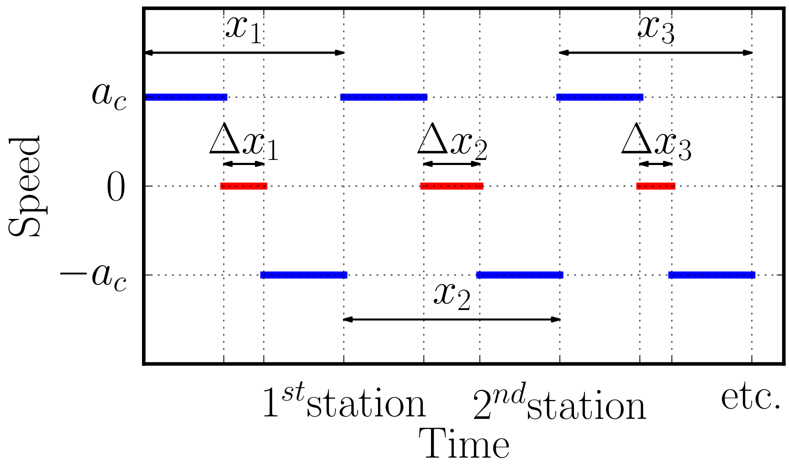
Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here t_i is the time of departure from station i, Δt_i is the time during which the train is at its cruise speed between stations $i-1$ and i. At station i the train spend a time t_{0i}. whenever the train is accelerating or decelerating the time elapsed will be called Δt

ii. Skizziere die Beschleunigung a_T des Zugs als Funktion der zurückgelegten Strecke bis zur dritten Zwischenstation. **3 pt.**



Label of axes. 0.5 pt.

Name of intervals or at least labelling of intervals. 0.5 pt.

Non zero waiting time at the station during which the speed is 0. 0.5 pt.

Non zero time interval during which the speed is v_c between acceleration and deceleration. 1 pt.

Coherent curves for acceleration. 0.5 pt.

here x_i is the distance between station i and the departure station, Δx_i is the distance covered by the train at its cruise speed between stations $i-1$ and i. Whenever the train is accelerating or decelerating the distance travelled will be called Δx

Teil C. Unterwegs *8 pt.*

Nimm an, dass der Zug zwischen zwei Stationen jeweils gleichmässig beschleunigt und abbremst, wobei die Beschleunigung $\pm a_T$ ist. Die Annahme aus Teil B gilt auch hier.

i. Finde einen Ausdruck für die Distanz $x_{i+1} - x_i$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zwischenstationen. In der Formel müssen die Beschleunigung a_T, die Reisegeschwindigkeit v_c und die Länge der Strecke, auf welcher der Zug mit der Reisegeschwindigkeit unterwegs ist, vorkommen. *(Gib der letzten Variable selbst einen passenden Namen.)* **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained by combining

$$x(t) = \frac{1}{2}a_T t^2$$

and

$$v(t) = at$$

1 pt.

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta x = \frac{v_c^2}{2a_T}$$

1 pt.

therefore the distance $x_{i+1} - x_i$ is given by

$$x_{i+1} - x_i = 2\Delta x + \Delta x_{i+1} = \frac{v_c^2}{a_T} + \Delta x_{i+1}$$

1 pt.

ii. Finde eine Formel für die Zeit $t_{i+1} - t_i$, die zwischen den Abfahrtszeiten in zwei aufeinanderfolgenden Zwischenstationen vergeht. In der Formel müssen auch hier a_T, v_c und die in der vorigen Teilaufgabe von dir definierte Variable vorkommen. **3 pt.**

The train covers the same distance, or spend the same time during acceleration and deceleration, this can be obtained simply with

$$v(t) = at$$

at time Δt, the train reached its cruise speed, $v_c = v(\Delta t)$

$$\Delta t = \frac{v_c}{a_T}$$

1 pt.

therefore the time $t_{i+1} - t_i$ is given by

$$t_{i+1} - t_i = 2\Delta t + \Delta t_{i+1} + t_{si+1} = \frac{2v_c}{a_T} + \Delta t_{i+1} + t_{si+1}$$

2 pt.

iii. Leite die Beschleunigung des Zugs her. *Gib zuerst eine Formel an und berechne dann das numerische Resultat.* **2 pt.**

We are given the total time T and the total distance D of the travel, we can sum up the individual components computed in the previous part and equate them to the latter.

$$D = \sum_{i=0}^{N} (x_{i+1} - x_i) = \frac{N v_c^2}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$$

0.5 pt.

$$T = \sum_{i=0}^{N}(t_{i+1} - t_i) = \frac{2Nv_c}{a_T} + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1} + \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

We can calculate the value of $Tv_c - D$ to get rid of the sums $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_{i+1}$ and $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta t_{i+1}$

$$Tv_c - D = \frac{Nv_c^2}{a_T} + v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}$$

0.5 pt.

as indeed the relation $\Delta t_{i+1} v_c = \Delta x_{i+1}$ is valid for every i. This yields the following result

$$a_T = \frac{Nv_c^2}{Tv_c - D - v_c \sum_{i=0}^{N-2} t_{si+1}}$$

0.25 pt.

Numerical application with $N = 7$

$$\frac{7(300\,\mathrm{kmh^{-1}})^2}{(5.25\,\mathrm{h})(300\,\mathrm{kmh^{-1}}) - 1233\,\mathrm{km} - (300\,\mathrm{km/h})(0.45\,\mathrm{h})} =$$

$$= 3043.48\,\mathrm{kmh}^-2 = 0.235\,\mathrm{ms}^{-2} = a_T$$

0.25 pt.