Optik

Aufwärmübungen

Optik

i. Die Sonne hat einen Radius $r_s = 700000\text{km}$ **und eine Distanz zur Erde** $R_s = 150$ **million** km**, während der Mond eine Radius** $r_m = 1700\text{km}$ **und eine Distanz** $R_m = 0.38$ **million** km **hat. Bei einer totalen Sonnenfinsternis bedeckt der Mond die Sonne vollständig. Bei einer Mondfinsternis ist der Mond im Schtten der Erde (der Radius der Erde ist** $r_e = 6400\text{km}$**). Warum ist die Mondfinsternis immer sichtbar wenn die Erde zwischen der Sonne und dem Mond ist, während man die totale Sonnenfinsternis nicht immer sichtbar ist, wenn der Mond zwischen der Erde und der Sonne ist?**

Since the earth is much bigger than the moon, its shadow will be much bigger, see 1.

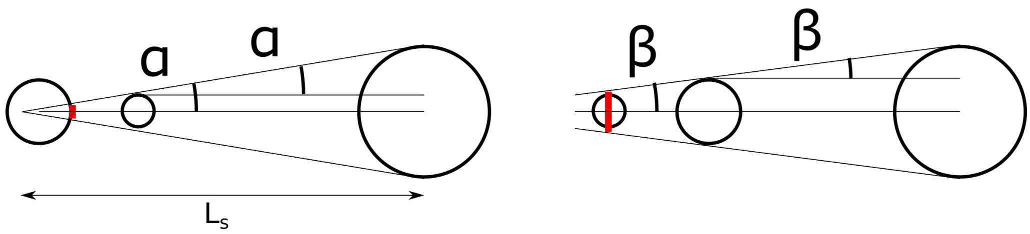

Abbildung 1:

In case of the solar eclipse, we can estimate the diameter of the moon's shadow by computing the opening angle α of the shadow cone by

$$\tan(\alpha) = \frac{r_s - r_m}{R_s - R_e}.$$

The distance from the apex of the cone to the sun L_s is then given by

$$L_s = \frac{r_s}{\tan(\alpha)}.$$

From this we can compute the radius of the shadow S_e on the earth surface

$$S_e = \tan(\alpha)(L_s - R_s) \approx 1700\text{km}$$

which is roughly one quarter of the earth radius. Therefore it depends where you are standing on the earth whether you can see the solar eclipse or not. Doing an analogous computation for the lunar eclipse, we find the following quantities

$$\begin{aligned}
\tan(\beta) &= \frac{r_s - r_e}{R_s} \\
L_m &= \frac{r_s}{\tan(\beta)} \\
S_m &= \tan(\beta)(L_m - R_s + R_m) \approx 8200\text{km}
\end{aligned}$$

which is almost five times bigger than the radius of the moon.

ii. Zwei Spiegel, welche sich entlang einer Kante berühren, stehen neben einander in einem Winkel von $60°$. Du steht zwischen den Spiegeln. Wie viele Spiegelbilder von dir siehst du vor dir? Und für welche Winkel siehst du dich ein ganzzahliges vielfaches vor dir?

Let's denote the two mirrors by mirror 1 and mirror 2. Mirror 1 shows an image of you, see 2. Mirror 2 mirrors the image of mirror 1 and this goes on like this. In the end you see yourself at the edges of a regular 6 polygon, hence you see yourself 5 times.

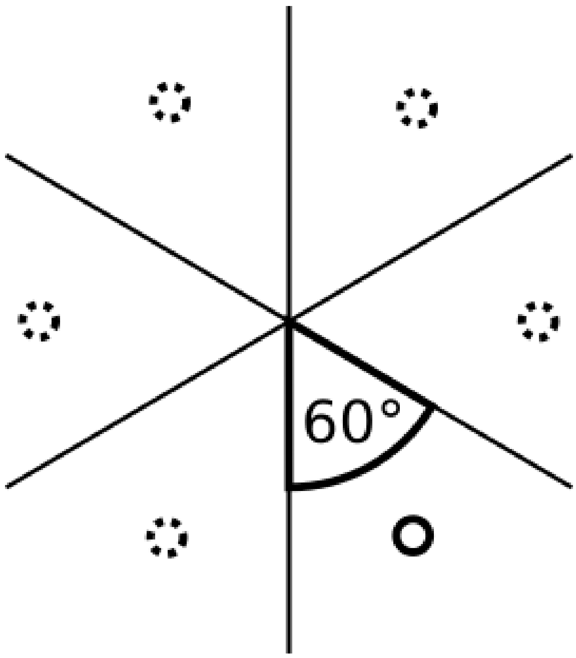

Abbildung 2:

In general the angle α between the mirrors and the number of mirrored images n are connected via $(n+1) \cdot \alpha = 360°$. Therefore all possible angles are

$$\alpha = \frac{360°}{n+1}$$

for any natural number n.

iii. Wie gross muss ein Spiegel mindestens sein, damit du dich vollständig im Spiegel siehst, wenn du davor stehst?

The mirror has to be at least half as big as you. To see this, consider figure 3. Your mirrored image has the same size as you. Drawing the rays from your eyes to your mirrored head and feed, we can apply the intersect theorem and see, that the mirror has to be half the size of you.

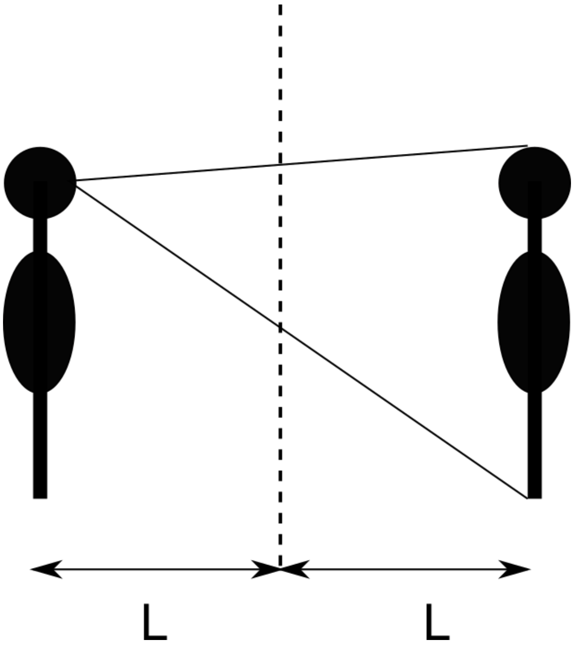

Abbildung 3:

iv. Ein Thermometer besteht aus einer zylinderförmigen Glasröhre mit Innenradius $r = 0.5\text{mm}$ und Aussenradius $R = 1.5\text{mm}$. Der Brechungsindex von Glas ist $n_1 = 1.5$ und jener von Luft ist $n_2 = 1$. Wie dick scheint dir der Innenradius, wenn du von der Seite auf das Thermometer schaust? Hinweis: Nimm der Einfachheit halber an, dass die Lichtstrahlen im Thermometer parallel verlaufen (siehe Abbildung 4)

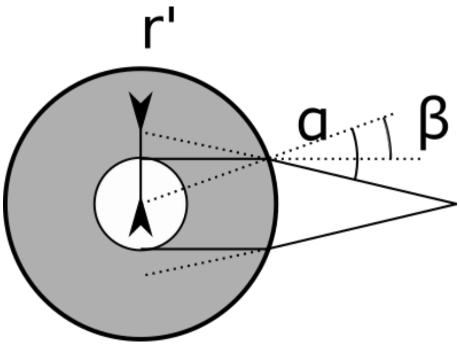

Abbildung 4:

Since the rays propagate parallel through the thermometer, each ray encloses an angle β with the surface normal given by

$$\sin(\beta) = \frac{r}{R}.$$

The length of each parallel ray is

$$L = \cos(\beta)R.$$

To compute the refracted angle, we use Snell's law and find

$$n_2 \sin(\alpha) = n_1 \sin(\beta).$$

The apparent radius of the inner radius is then

$$r' = r + \tan(\alpha - \beta)L = 0.76\text{mm}.$$

Alternatively one can also compute the distance from the thermometer to the eye L_e which is

$$L_e = \frac{r}{\tan(\alpha - \beta)}$$

and then compute the apparent diameter by

$$r' = \tan(\alpha - \beta)(L_e + L) = 0.76\text{mm}.$$

v. Ein Prisma ist ein dreieckiges Stück Glas ($n = 1.3$), siehe Abb 5. Nimm an der Scheitelwinkel sei $90°$ und dass der einfallende Strahl in einem Winkel von $\alpha = 60°$ zur Flächennormale eintrifft.

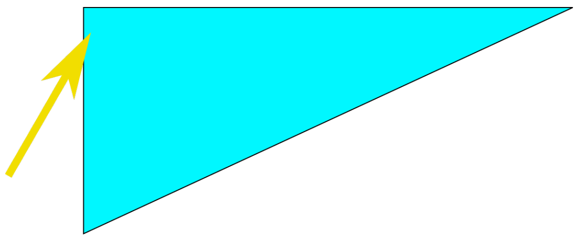

Abbildung 5:

a) **Zeichne qualitativ den Weg des Lichtes im Prisma.**

b) **Wie gross ist der Winkel β des gebrochenen Strahls in Bezug auf die Flächennormale?**

c) **Wie lang ist die Weglänge des Lichtes durch den Kristall, wenn der einfallende Strahl den Kristall bei einer Entfernung $d = 5\text{mm}$ vom Scheitel trifft?**

d) **Wie lange braucht das Licht, um den Kristall zu durchqueren?**

e) **Wenn das Licht die andere Seite erreicht, welchen Winkel schlisst der Strahl mit der Flächennormalen ein?**

f) **Wie gross ist der Austrittswinkel (in der Luft) in Bezug auf die Flächennormalen der zweiten Fläche?**

g) **Was ist der minimale Einfallswinkel α, bei dem das Licht das Prisma auf der Seite verlassen kann bevor es total reflektiert wird?**

a) see figure 6

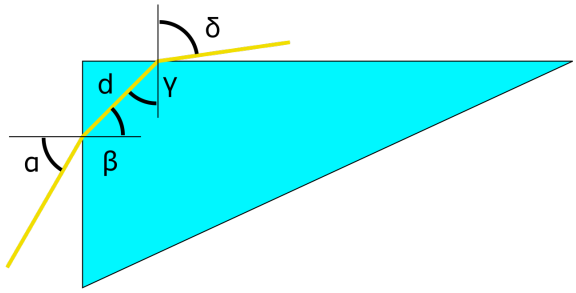

Abbildung 6:

b) We use Snells law $\sin(\alpha) = n\sin(\beta)$ which leads to a $\beta = 42°$.

c) The propagation length l is $l = d/\sin(\beta) = 7.5\text{mm}$

d) The speed of light in the crystal is $v = c/n$ where c is the speed of light in vacuum. Hence we get a duration of $t = l/v = 3.2 \times 10^{-11}\text{s}$.

e) Using the apex angle being 90°, the angle is $\gamma = 90° - \beta = 48°$.

f) We apply again Snell's law and get $\delta = \arcsin(\sin(\gamma)n) = \arcsin(\cos(\beta)n) = 76°$.

g) The critical angle is given for $\delta = 90°$ which means $\sin(\gamma) = 1/n$. Making again use of the 90° apex angle, we have $\cos(\beta) = \sin(\gamma) = 1/n$. Applying Snell's law and $\sin(\beta)^2 = 1 - \cos(\beta)^2$ we get an incidence angle α as

$$\begin{aligned}\alpha &= \arcsin(n\sin(\beta)) \\ &= \arcsin(n\sqrt{1-\cos(\beta)^2}) \\ &= \arcsin(n\sqrt{1-1/n^2}) = 56°\end{aligned}$$

which is the maximal incidence angle.

vi. Wir nehmen eine Linse mit Brennweite $f = 10\text{cm}$ und platzieren einen Gegenstand bei einer Distanz von $u = 15\text{cm}$ vor die Linse.

a) Finde die position der Bildes vom Objekt

b) Nun stellen wir einen Spiegel in einem Abstand von $d = 10cm$ hinter die Linse. Mache eine geeignete Zeichnung und konstruiere das Bild. An welcher Position ist das Bild nun?

d) Überlege dir eine experimentelle Methode um mit Hilfe dieses Aufbaus die Brennweite einer konvexen Linse zu bestimmen. (Hinweis: wähle ein geeignetes u)

a) We use the lens equation to determine the distance b of the image

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{b}$$

Solving for b leads to

$$b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{u}} = \frac{1}{\frac{1}{10}\text{cm}^{-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{10}\text{cm}} = \frac{10}{\frac{1}{3}}\text{cm} = 30\text{cm}.$$

b) See figure 7, the distance from the object is 10cm.

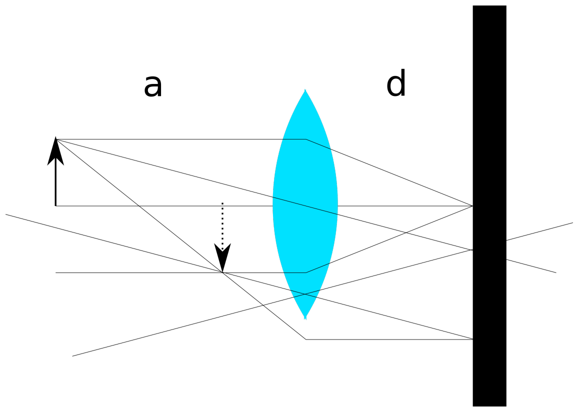

Abbildung 7:

c) When changing u to $u = f$, the rays after the lens are parallel. After being reflected at the mirror, they are still parallel and imaged at the same position as the object. Therefore the procedure to measure the focal length is the following: we put a screen right behind the object (ideally without any space in between object and screen). Then we move the lens until we get a sharp image on the screen. The distance between the lens and the screen/object is then the focal length.

vii. Du möchtest einen rote Apfel (Wellenlänge 700nm**) mit einem Durchmesser von** 5cm **auf einen Schirm abbilden, sodass der Apfel doppelt so gross erscheint. Der Abstand zwischen dem Apfel und dem Schirm sei** 1.5m**. Für die Abbildung nimmst du eine einzige dünne Linse.**

a) **Wo platzierst du die Linse, bzw. was ist der Abstand zwischen dem Apfel und der Linse?**

b) **Welche Brennweite muss die Linse haben um diese Abbildung zu erzeugen?**

c) **Ein Wurm schaut aus dem Apfel und lächelt dich an. Du hast eine Linse mit kleinem Durchmesser und ein mit grossem Durchmesser zur Hand. Welche nimmst Du, um eine besser Auflösung des Wurmes zu haben?**

d) **Nimm an, der Wurm habe einen Durchmesser von** 0.1mm**, welchen Durchmesser brauchst du mindestens/maximal um ihn aufzulösen?**

a) The ratio between the size of the object (apple) O and the Image I is equal to the ratio of the distance between the object and the lens o and the distance between image and lens i (this can be seen from the intersection theorem). Formally we get

$$\frac{O}{I} = \frac{o}{i}$$

and hence the the distance from the image to the lens is twice as big as the one from the apple to the lens and hence $o = 0.5\text{m}$ and $i = 1\text{m}$.

b) Knowing o and i, we can compute the focal length using the lens formula

$$f = \frac{1}{\frac{1}{o} + \frac{1}{i}} = \frac{1}{3}\text{m}.$$

c) To get a high resolution image, an optical system with big diameter optics is always preferable. Otherwise small optical elements have a similar effect as an aperture leading to diffraction.

d) To resolve the worm, we have to be able to resolve an angle of $\delta \approx \frac{0.1\text{mm}}{0.5\text{m}} = 0.0002$ rad. According to the diffraction formula

$$\sin(\delta) = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

where D is the diameter of the iris or in this case the lens, we get a minimal diameter of

$$D = 1.22\frac{\lambda}{\sin(\delta)} \approx 4.2\text{mm}.$$