Challenge 3, Oscillations et Ondes: Solution

Un pendule dans un condensateur *14 pt.*

Dans ce problème, on souhaite étudier le comportement d'un pendule dans un champ électrique. Pour ce faire, on considère un condensateur plan (idéal) avec des plaques de surface $A = 1\,\mathrm{m}^2$, éloignées d'une distance $d = 20\,\mathrm{cm}$, ainsi qu'une petite boule de masse $m = 5\,\mathrm{g}$, attachée à un fil de longueur $l = 10\,\mathrm{cm}$.

Partie A. Champ électrique *3 pt.*

i. Calculer la capacité C du condensateur. **1 pt.**

We have

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

0.5 pt.

The numerical result is $C = 44.27\,\mathrm{pF}$. 0.5 pt.

ii. Calculer la tension et le champ électrique lorsque le condensateur porte une charge $Q = \pm 2\,\mu\mathrm{C}$. **2 pt.**

We have

$$U = \frac{Q}{C}$$

0.5 pt.

and therefore

$$E = \frac{U}{d}$$

0.5 pt.

the numerical results are

$$U = 44.52\,\mathrm{kV} \text{ and } E = 226\,\mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

(0.5 points each) 1 pt.

Partie B. Oscillation *11 pt.*

Si vous n'avez pas pu résoudre les tâches précédentes, utilise un champ électrique de $E = 2.26\,\mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ pour les exercises suivantes.

i. On place à présent le pendule au milieu du condensateur dont les plaques sont parallèles au plan yz (i.e. verticales par rapport au champ gravitationnel) ; la boule est chargée avec $q = 200\,\mathrm{nC}$. Esquisser les forces agissant sur la boule ainsi que la force résultante. **2 pt.**

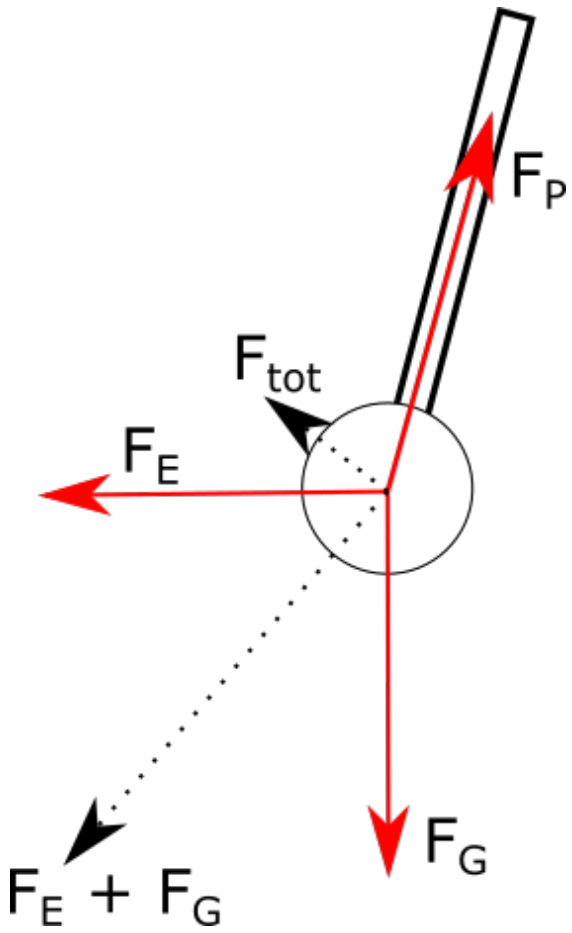

FIGURE 1 –

For the electrical force. 0.5 pt.

For the gravititional force. 0.5 pt.

For the force in the pendulum. 0.5 pt.

For the resulting force. 0.5 pt.

ii. Quel est l'angle formé par le pendule au repos avec la verticale ? **2 pt.**

In x-direction we have the electrical force $F_{el} = qE$ and in z direction the gravitational force $F_g = mg$ 0.5 pt.

Therefore we get the angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_{el}}{F_g}\right)$$

1 pt.

The numerical result is $\theta = 83.8°$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) or $\theta = 42.65°$ (for $E = 226\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). 0.5 pt.

iii. Si on déplace le pendule d'un petit angle par rapport à sa position d'équilibre, il va en résulter une oscillation (approximativement harmonique). Calculer la fréquence de ces oscillations.
Indication : Pour $x \ll 1$ ***, on pourra utiliser*** $\sin x \approx x$ **5 pt.**

At every point we have the same force $F_{el+g} = \sqrt{F_{el}^2 + F_g^2}$ acting on the charge under an the angle θ, which we calculated above. Around the equilbrium point the force becomes

$$F_r = -F_{el+g}\sin(\phi)$$

where ϕ deflection from equilbrium. 1 pt.

We make a Taylor approximation for small ϕ

$$F_r \approx -F_{el+g}\phi$$

0.5 pt.

We get the equation of motion

$$ml\ddot{\phi} = -F_{el+g}\phi$$

and therefore

$$\ddot{\phi} = -\frac{F_{el+g}}{ml}\phi$$

1 pt.

From $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$ we can identify

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{el+g}}{ml}}$$

1 pt.

With $\omega = 2\pi f$ 0.5 pt.

the frequency becomes

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^{1/4} = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

0.5 pt.

The numerical value of f is $4.8\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) or $1.838\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 226\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) 0.5 pt.

iv. De quelle manière est modifiée la fréquence des oscillations si la tension du condensateur est maintenue constante et la distance entre les plaques est augmentée de $\Delta d = 5\,\mathrm{cm}$? **2 pt.**

The charge changes by

$$Q' = Q\frac{d}{d+\Delta d}$$

1 pt.

Therefore we can use the formula

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

again. 0.5 pt.

The numerical value is $f = 4.3\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) or $f = 1.757\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 226\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) 0.5 pt.