Challenge 3, Wellen und Schwingungen: Lösung

Pendel im Kondensator *14 pt.*

In dieser Aufgabe untersuchen wir das Verhalten eines Pendels in einem elektrischen Feld. Dazu betrachten wir einen (idealen) Plattenkondensator mit Plattenfläche $A = 1\,\mathrm{m}^2$ sowie Abstand $d = 20\,\mathrm{cm}$ und eine kleine Kugel der Masse $m = 5\,\mathrm{g}$, welche an einem Faden der Länge $l = 10\,\mathrm{cm}$ aufgehängt ist.

Teil A. Elektrisches Feld *3 pt.*

i. Berechne die Kapazität C des Kondensators. **1 pt.**

We have

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

0.5 pt.

The numerical result is $C = 44.27\,\mathrm{pF}$. 0.5 pt.

ii. Wie gross sind die Spannung und das elektrische Feld, wenn sich auf den Kondensatorplatten die Ladung $Q = \pm 2\,\mu\mathrm{C}$ befindet? **2 pt.**

We have

$$U = \frac{Q}{C}$$

0.5 pt.

and therefore

$$E = \frac{U}{d}$$

0.5 pt.

the numerical results are

$$U = 44.52\,\mathrm{kV} \text{ and } E = 226\,\mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

(0.5 points each) 1 pt.

Teil B. Schwingung *11 pt.*

Falls du die vorherigen Teilaufgaben nicht lösen konntest, benutze ein elektrisches Feld von $E = 2.26\,\mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ für die folgenden Aufgaben.

i. In der Mitte des Kondensators, dessen Platten parallel zur yz -Ebene sind (d.h. senkrecht zur Gravitation), platzieren wir nun unser Pendel. Dabei wird die Kugel mit $q = 200\,\mathrm{nC}$ geladen. Skizziere, welche Kräfte auf die Kugel wirken, sowie die daraus resultierende Kraft. **2 pt.**

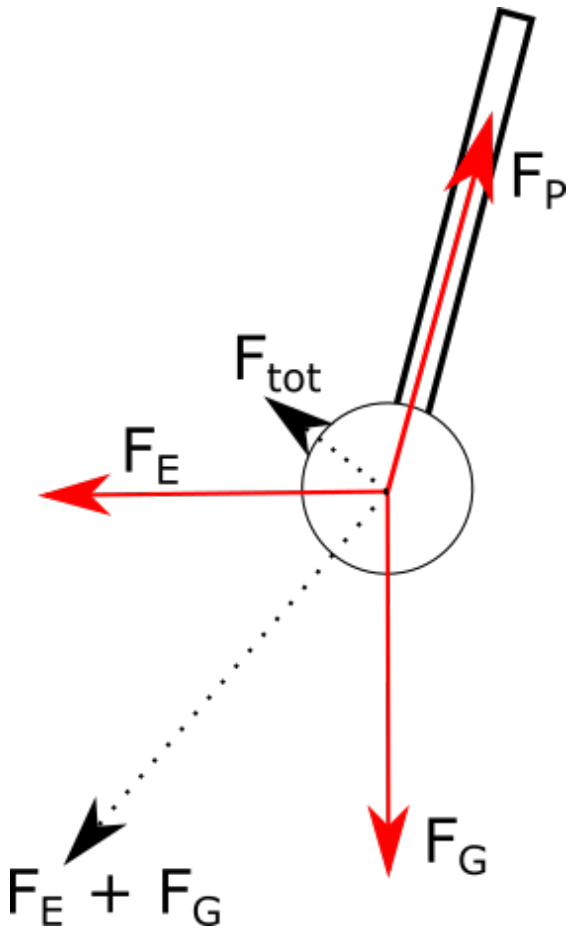

Abbildung 1:

For the electrical force. 0.5 pt.

For the gravititional force. 0.5 pt.

For the force in the pendulum. 0.5 pt.

For the resulting force. 0.5 pt.

ii. Welchen Winkel schliesst das Pendel in der Ruhelage mit der Senkrechten ein? **2 pt.**

In x-direction we have the electrical force $F_{el} = qE$ and in z direction the gravitational force $F_g = mg$ 0.5 pt.

Therefore we get the angle

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_{el}}{F_g}\right)$$

1 pt.

The numerical result is $\theta = 83.8°$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) or $\theta = 42.65°$ (for $E = 226\,\mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$). 0.5 pt.

iii. Wird das Pendel um einen kleinen Winkel von dieser Ruhelage ausgelenkt, so wird es eine (näherungsweise harmonische) Schwingung ausführen. Berechne die Frequenz dieser Schwingung! *Hinweis: Für* $x \ll 1$ *gilt* $\sin x \approx x$. 5 pt.

At every point we have the same force $F_{el+g} = \sqrt{F_{el}^2 + F_g^2}$ acting on the charge under an the angle θ, which we calculated above. Around the equilbrium point the force becomes

$$F_r = -F_{el+g} \sin(\phi)$$

where ϕ deflection from equilbrium. 1 pt.

We make a Taylor approximation for small ϕ

$$F_r \approx -F_{el+g}\phi$$

0.5 pt.

We get the equation of motion

$$ml\ddot{\phi} = -F_{el+g}\phi$$

and therefore

$$\ddot{\phi} = -\frac{F_{el+g}}{ml}\phi$$

1 pt.

From $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$ we can identify

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{el+g}}{ml}}$$

1 pt.

With $\omega = 2\pi f$ 0.5 pt.

the frequency becomes

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^{1/4} = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

0.5 pt.

The numerical value of f is $4.8\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) or $1.838\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 226\,\mathrm{kV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) 0.5 pt.

iv. Wie verändert sich die Frequenz der Schwingung, wenn die Spannung des Kondensators konstant gehalten und der Abstand der Platten um $\Delta d = 5\,\mathrm{cm}$ vergrössert wird? **2 pt.**

The charge changes by

$$Q' = Q\frac{d}{d+\Delta d}$$

1 pt.

Therefore we can use the formula

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{ml}}\left(\left(\frac{qQ}{\epsilon_0 A}\right)^2 + (mg)^2\right)^{1/4}$$

again. 0.5 pt.

The numerical value is $f = 4.3\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 2.26\,\mathrm{MV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) or $f = 1.757\,\mathrm{Hz}$ (for $E = 226\,\mathrm{kV}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) 0.5 pt.