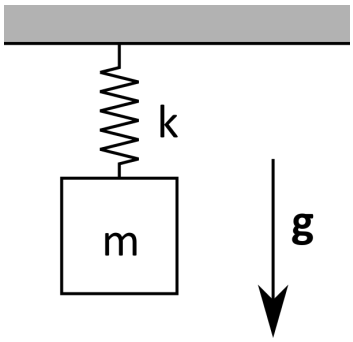
Wellen und Schwingungen

Aufwärmübungen

Harmonische Schwingungen (Kaptitel 5.2)

i. Eine Masse m ist durch eine Feder mit Federkonstante k an die Decke gebunden. Finde eine Funktion die die vertikale Position der Feder als Funktion der Zeit beschreibt. Nehmen an, dass die Feder zum Zeit $t = 0$ nicht gedehnt ist.



Hinweis: Wähle dein Koordinatensystem und zeichne die Achsen. Bezeichne die Gleichgewichtslage der Masse mit x_0. Beschreibe das System mit einer homogenen Differentialgleichung (die Gleichung besteht nur aus Termen die von x oder Ableitungen von x abhängen). Löse die Gleichung mit einem Ansatz sowie im Skript.

As for all mechanical problems, we first must draw a system of coordinate. In the picture below, the x-axis has its origin in the ceil and points towards the bottom. The equilibrium position of the system x_0 is also indicated.

We can now write the Newton's law for this system:

$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F_g} + \vec{F_k}$$

Let project all the vectors along the x-axis:

$$m \cdot a = F_g - F_k = mg - k \cdot x$$

Finally, we remember that $a = \ddot{x}$ and get the differential equation.

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = mg$$

To make the equation homogeneous, it it useful to find the equilibrium point. At equilibrium, the mass does not move anymore, so $\ddot{x} = 0$ and $x_0 = mg/k$.

We can now use this point to express x: $x = x_0 + \tilde{x}$. Since x_0 is constant, we have $\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}}$. Replacing x and $\ddot{x}$ by these expression in the differential equation gives:

$$m \cdot \ddot{\tilde{x}} + k \cdot (x_0 + \tilde{x}) = mg$$

$$m \cdot \ddot{\tilde{x}} + k \cdot \tilde{x} = 0$$

To obtain the last equation, we use the equation for the equilibrium point.

This differential equation is homogeneous, and we can solve it as described in the script. First we take an Ansatz for $\tilde{x}$: $\tilde{x} = A\sin(\omega t + \phi)$ and we put it in the differential equation:

$$-m \cdot \omega^2 A \sin(\omega t + \phi) + k \cdot A \sin(\omega t + \phi) = 0$$

$$m \cdot \omega^2 = k$$

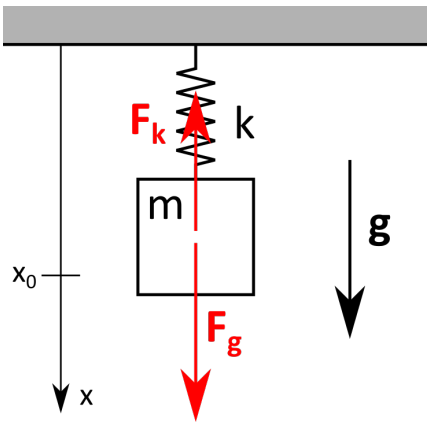
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Thus

$$\tilde{x}(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi\right)$$

$$x(t) = x_0 + A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi\right)$$

This is the general solution for this problem. If we had additional information about the system (where the mass is at two given time), we would also be able to find the value for the constants A and ϕ.



Wellenausbreitung (Kaptitel 6.4)

ii. Erkläre warum der Ton eines Martinshorn des Krankenwagens höher wird wenn der Krankenwagen auf den Beobachter zufährt?

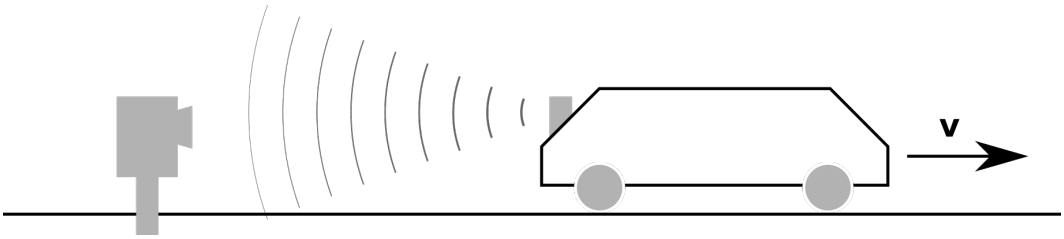
The emergency car generates a sound in a frequency f. This is a periodic signal i.e. its intensity varies with time and after a time $T = 1/f$ it repeats the same pattern. The bigger T is, the deeper we perceive the sound.

Once generated, the sound travels from the emergency car to our ears. The closer the emergency car is, the less time the sound takes to reach us.

When the emergency car is moving towards us, the sound generated at time $t+T$ will take less time to reach us than the sound generated at time t. Thus, the period we perceive is smaller, so the sound is higher pitched.

iii. Maxime will die maximale Geschwindigkeit von seinem elektronischen Zug messen. Dafür legt er einen kleinen Alarm auf den Zug der einen Ton von der Frequenz $f_1 = 1\,\mathrm{kHz}$ erzeugt. Er legt auch einen Sensor auf die Schienen, der die Frequenz von einem Ton messen kann. Als der Zug sich von dem Sensor wegbewegt, misst der Sensor eine Frequenz $f_2 = 994\,\mathrm{Hz}$. Wie schnell bewegt sich der Zug?

Die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist $v = 340\,\mathrm{m/s}$.

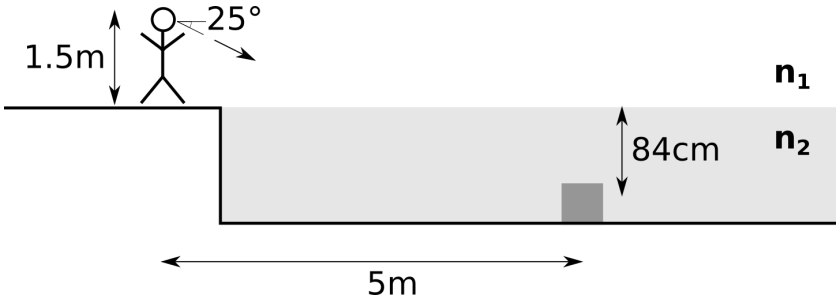


The shift in frequency is due to the Doppler effect. We can rewrite the formula in the following way:

$$v_{train} = v\frac{f_1 - f_2}{f_2} = 2.05\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Wellenausbreitung an Oberflächen (Kaptitel 6.5)

iv. Alice steht am rand von einem Schwimmbad und schaut ins Wasser unter einem Winkel $\phi = 25°$ unter der Horizontalen. Sie hat vorher einen Objekt $84\,\mathrm{cm}$ unter Wasser und $5\,\mathrm{m}$ am Rand wo sie steht, platziert.



a) **Angenommen es gäbe kein Wasser im Schwimmbad. Schaut Alice in die richtige Richtung (und unter dem richtigen Winkel) um das Objekt zu sehen?**

b) **Wie ändert sich deine Antwort zu Teil a), wenn wir das Wasser berücksichtigen?**

c) **Falls Alice nicht in die richtige Richtung schaut, soll sie den Kopf nach oben (der Winkel wird kleiner) oder nach unten bewegen, um das Objekt zu sehen?**

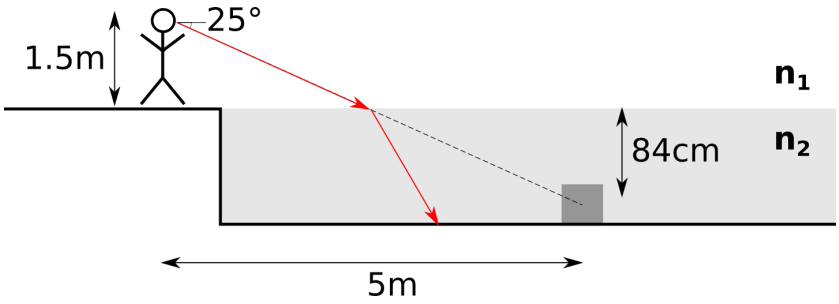
a) Without water, we don't have to take care of the refraction and the line of sight stay straight. The direction to look at the object is:

$$\phi = \arctan\left(\frac{1.5\,\mathrm{m} + 0.84\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}}\right) = 25.1°$$

This is close enough to 25°. So, Alice will be able to see the object.

b) With the water, the line of sight will be bended at the interface air-water. Since the refraction index of water is bigger than the refraction index of air, the line of sight is more vertical in water and Alice will not see the object.

c) The point that Alice see on the bottom is not far enough. So, Alice must raise her head to be able to see the object.



Multi-Wellen Phänomene (Kaptitel 6.6)

v. Bestimme die Periode der Wellen unten:

$$y(t) = \cos(10\pi t) - \sin(15\pi t) + \sin(20\pi t + \pi/2)$$

$y(t)$ is the sum of 3 sinusoidals with frequencies $f_1 = 5$, $f_2 = 7.5$ and $f_3 = 10$. For this exercise we do not have to take care about the phase, since it has no influence on the frequency. The frequency of $y(t)$ is the greatest common divider of f_1, f_2 and f_3. Thus $f_y = 2.5$ and the period of the signal is $T = 0.4$.

vi. Wir haben ein Gitarre mit Saitenlänge $L = 90\,\mathrm{cm}$. Mit welcher Frequenz kann die Saite schwingen? Wie ändert sich deine Antwort, wenn wir statt einer Saite ein Rohr betrachten, das auf einer Seite ist offen und geschlossen auf der anderen? *Hinweis: In beiden Fällen haben wir es mit stehenden Wellen zu tun. D.h. eine Welle, deren Auslenkung an bestimmten Stellen immer Null ist und sich nicht fortzubewegen zu scheint. Eine stehende Welle ist eine Überlagerung zweier gleichen gegenläufig fortschreitender Wellen. Nehme an, dass die Saite an beiden Enden fixiert ist und sich nicht bewegen kann. Nehme für das Rohr an, dass der Druck am offenen Ende konstant ist.*

Because it is fixed, the string cannot oscillate at its ends i.e. any standing wave on the string must have nodes there. So, on the string's length we can put either 0.5 or 1 or 1.5 ... wavelengths: $L = \frac{n}{2}\lambda$ where n is an integer. We want now to find the corresponding frequencies $f = \frac{v}{\lambda} = v\frac{n}{2L}$. Where v is the propagation speed of the wave in the string. This value depends on the width of the string and on how it is stretched.

In the tube, oscillations are allowed at one end (let say the right one) and not at the other. This time we can place either 0.25 or 0.75 or 1.25 ... wavelengths: $L = (0.25 + \frac{n}{2})\lambda$ where n is an integer. Thus, $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}(0.25 + \frac{n}{2})$. This time $v = 340\,\mathrm{m/s}$, it is the speed of sound in air.

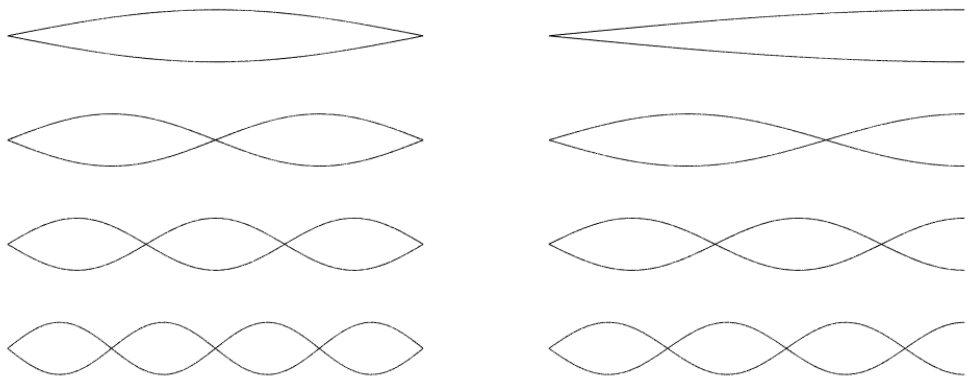


Abbildung 1: The first oscillations' modes on the string (left) and in the half-opened tube (right).