2. Lösung Wärmelehre

(a) $\underline{\underline{P_Q = UI = \frac{U^2}{R_W}}}$ {0.75}

(b) $\underline{\underline{I_Q = kA\frac{T-T_R}{d}}}$ {0.75}

(c) Der Druck im Rohrinnern ist konstant: $P^* = P_{atm} + \frac{mg}{r^2\pi}$ [0.5]

Die Zustandsgleichung idealer Gase $PV = nRT$ verknüpft die Temperatur mit dem Volumen und dem Druck: $T = \frac{P^*V}{nR}$ [0.5], wobei V noch als Funktion der Mantelfläche geschrieben werden kann: $V = r^2\pi h = \frac{1}{2}r2\pi rh = \frac{1}{2}rA$.

Man findet T in Abhängigkeit der gewünschten Grössen:

$\underline{\underline{T = \frac{P^*Ar}{2nR}}}$ [0.5] {1.5}

(d) Sobald der Wärmestrom, der das System durch die Wände verlässt gleich der dissipierten Leistung des Widerstands ist, befindet sich das System im stationären Zustand:

$\underline{\underline{P_Q = I_Q}}$ {0.75}

(e) Die Gleichgewichtsbedingung führt zum Wert von A im Gleichgewicht:

$$P_Q = I_Q = kA\frac{\frac{P^*Ar}{2nR} - T_R}{d} = A^2\frac{kP^*r}{2nRd} - A\frac{kT_R}{d} \quad [1]$$

Diese quadratische Gleichung bietet zwei mögliche Werte für A:

$$A_{1,2} = \frac{nRT_R}{P^*r} \pm \sqrt{\left(\frac{nRT_R}{P^*r}\right)^2 + 2\frac{nRdP_Q}{P^*kr}} \quad [1.5]$$

Nur eine Lösung hat physikalisch Sinn (+); die Lösung mit dem „-“ ist unabhängig von den Parameterwerten negativ. Daher ist die Fläche im Gleichgewichtszustand

$$A \equiv A^* = \frac{nRT_R}{P^*r} + \sqrt{\left(\frac{nRT_R}{P^*r}\right)^2 + 2\frac{nRdP_Q}{P^*kr}} \quad [0.5]$$

Die gesuchte Höhe h^* ist nun bestimmt:

$$\underline{\underline{h^*}} = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{nRT_R}{P^*r} + \sqrt{\left(\frac{nRT_R}{P^*r}\right)^2 + 2\frac{nRdP_Q}{P^*kr}}\right) = \frac{T_RnR}{P^*r}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{rdP^*U^2}{nkRR_WT_R^2}}\right) \quad [0.5]\ \{3.5\}$$

(f) $\underline{\underline{h^* = 77.489cm}}$ {0.75}

Vergleich: $h(P_Q = 0) = 77.218cm$. Der Deckel verschiebt sich also nur um Δh=2.71mm beim Einschalten der Spannungsquelle! Dies reicht aus um die 100W aus dem Rohr zu evakuieren, denn die Volumenvergrösserung $\Delta V = r^2\pi\Delta h$ geht bei gleich bleibendem Druck P^* mit einer Temperaturerhöhung einher:

$$\Delta T = \frac{P^*}{nR}\left(V^* - V\left(P_Q = 0\right)\right) = \frac{P^*}{nR} r^2 \pi \Delta h = 1.027°C$$

Dieser Temperaturgradient lässt durch die Fläche A^* den gewünschten Wärmestrom fliessen:

$$I_Q = kA^* \frac{\Delta T}{d} = 100W$$

Das Heben des Deckels dient bei diesen Parameterwerten also in erster Linie dem Zustandekommen einer Temperaturdifferenz als einer merklichen Vergrösserung der Mantelfläche.

(g) Da keine Wärme mehr das System verlassen kann (Isolation), und zudem keine Arbeit verrichtet wird ($\Delta V=0$), ist die vom Widerstand dissipierte Energie gleich der Änderung der inneren Energie U des Systems:

$$\Delta U = cnR\Delta T = \Delta W + \Delta Q = 0 + \frac{U^2}{R_W} t$$

Damit ist die Temperaturänderung bestimmt, die das Gas während der Zeit t erfährt, in welcher der Experimentator den Deckel auf der Höhe h^* hält:

$$\Delta T = \frac{U^2}{cnRR_W} t \text{ [0.5]}$$

Sei T^* die Temperatur des Gases zum Zeitpunkt t=0, T_1 diejenige nach einer gewissen Zeitdauer t. Zu jedem Zeitpunkt muss die Zustandsgleichung des idealen Gases erfüllt sein:

$P^* V^* = nRT^*$ sowie $P_1 V^* = nRT_1$

Die Differenz dieser Gleichungen führt zu

$\Delta P V^* = nR\Delta T$, wobei $\Delta P = P_1 - P^*$ und $\Delta T = T_1 - T^*$

Daher

$$\Delta P = \frac{nR\Delta T}{V^*} = \frac{U^2}{cV^* R_W} t$$

Dieser Überdruck muss vom Experimentator durch eine entsprechende Gegenkraft kompensiert werden:

$$\underline{\underline{F}} = r^2 \pi \Delta P = \underline{\underline{\frac{r^2 \pi U^2}{cV^* R_W}}} t \text{ [1]}$$

In Zahlen: F(t=3s)=258.102N [0.5]

Die Wanddicke d beeinflusst den Betrag dieser Kraft, da $V^*=V^*(d)$. [0.5] {2.5}

(h) Alle Wärmeflüsse sind gekappt, daher ist die Ausdehnung, die nach dem Loslassen erfolgt, adiabatisch, charakterisiert durch $PV^\gamma = const.$ Die Gleichgewichtshöhe ist charakterisiert durch die Abwesenheit einer Kraft auf den Deckel (keine Beschleunigung). Dies ist der Fall, wenn der Druck im Innern des Rohres wiederum P^* entspricht:

$(P^* + \Delta P)V^{*\gamma} = P^* V'^\gamma$ [0.75]

Somit ist das Volumen V' beziehungsweise die Höhe h' im neuen Gleichgewicht bestimmt:

$$\underline{\underline{h'}} = \frac{1}{r^2\pi}\left(\frac{P^* + \Delta P}{P^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V^* = \underline{\underline{h^*\left(1 + \frac{U^2 t}{cV^* R_W\left(P_{atm} + \frac{mg}{r^2\pi}\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}} = 81.231cm \ \ [0.75]\ \{1.5\}$$

wobei $\gamma = 5/3$ für ein einatomiges Gas

Die neue Gleichgewichtslage befindet sich also Δh=3.742cm höher als die vorherige.

(i) Im beschriebenen Modell wird der Deckel ungedämpfte Schwingungen ausführen.
Am besten teilt man das betrachtete System in drei Teilsysteme auf:

1. System Gas (eingeschlossenes Volumen)
2. System Deckel
3. System Atmosphäre (Umgebendes Gas)

System 2 speichert Energie in Form von potentieller und kinetischer Energie.
System 1 gibt während der adiabatischen Expansion (ΔQ=0) folgenden Energiebetrag durch Arbeit an die anderen Systeme ab:

$\Delta W_{ab} = \Delta U = cnR\Delta T$ [0.5]

Mit Hilfe der Zustandsgleichung findet man

$\Delta T = \frac{P_2V_2 - P'V'}{nR}$ und somit $\Delta W_{ab} = c(P_2V_2 - P'V') = -123J$ [0.5]

Davon geht $P_{atm}\Delta V' = P_{atm} r^2\pi\Delta h$ durch mechanische Arbeit an System 3. Also bleiben

$\Delta E = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin} = -\Delta W_{ab} - r^2\pi\Delta h P_{atm}$ für System 2.

$(-\Delta W_{ab} = \Delta W_{auf,System2,3} = 123J)$

$\Delta E_{pot} = mg\Delta h$ ist bestimmt. So findet man

$\Delta E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 = -\Delta W_{ab} - r^2\pi h' P_{atm} - mg\Delta h$ und schliesslich

$$\underline{\underline{v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(-\Delta W_{ab} - r^2\pi\Delta h P_{atm} - mg\Delta h\right)} = 2.511ms^{-1}}} \ \ [1]\ \ \{2\}$$

(k) Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen dem Adiabatenexponenten γ und der Oszillationsfrequenz aufzustellen.
Sei z die Koordinatenachse parallel zur Erdbeschleunigung, positive Richtung nach oben, Nullpunkt auf der in Teilaufgabe (h) berechneten Gleichgewichtshöhe h'.
Die rückstellende Kraft resultiert aus einer Druckdifferenz ΔP, die sich beim deplatzieren aus der Gleichgewichtslage ergibt. Nach Newton:
$m\ddot{z} = S\Delta P$, wobei S die Deckelfläche ist. [0.5]
Um auf die Form der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators zu gelangen, sucht man ΔP=ΔP(z). Dazu nutzt man die Information, dass das System einen adiabatischen Prozess durchläuft: $PV^{\gamma} = const.$ Nach V abgeleitet:

$$\frac{dP}{dV}V^{\gamma} + P\frac{d}{dV}\left(V^{\gamma}\right) = 0$$

$$\frac{dP}{dV}V^{\gamma} + P\gamma V^{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P\gamma}{V} \Rightarrow \underline{dP = -\frac{P\gamma S}{V}dz} \ \ (1)\ \ [0.5]$$

Eigentlich ist P Funktion von z, P=P(z), da

$$P'V'^{\gamma} = PV^{\gamma} = P(V'+Sz) \Rightarrow P(z) = P'\left(\frac{V'}{V'+Sz}\right)^{\gamma}$$

Ebenfalls ist V=V(z), doch mit der Einschränkung auf kleine Amplituden ist $Sz << V'$ und daher $P(z) \approx P' = const.$ sowie $V(z) \approx V' = const.$

Damit ist Gleichung (1) leicht integrierbar und liefert

$$\Delta P = -\int_0^z \frac{P'\gamma S}{V'} dz' = -\frac{P'\gamma S}{V'} z \quad [0.5]$$

Somit haben wir nun

$$\ddot{z} = -\frac{P'\gamma S}{mV'} z \equiv -\omega^2 z \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = \frac{4\pi^2 f^2 mV'}{S^2 P'} = 1.68}}$$

Der Wert liegt nahe am theoretischen Wert für ein einatomiges Gas (1.66). Es handelt sich also mit hoher Wahrscheinlichkeit um ein einatomiges Gas. [0.5] {2}