Lösung:

a) Damit die Rolle sich zu bewegen beginnt, muss das Drehmoment M_g durch das herabhängende Stück Papier grösser sein als das Drehmoment M_R durch die Reibung. Wir haben $M_g = F_g R = xld\rho g R$ und $M_R = F_R r = \mu_H M g r$, wobei $m = \rho l \pi (R^2 - r^2)$ die Masse der Papierrolle bezeichnet. Insgesamt ergibt dies $xld\rho g R = \mu_H g \rho l \pi (R^2 - r^2) r$. Nach x aufgelöst ist dies

$$x = \frac{\mu_H r}{dR} \pi (R^2 - r^2) = \frac{0.25 \cdot 2\,\mathrm{cm}}{0.3\,\mathrm{mm} \cdot 6\,\mathrm{cm}} \pi \cdot (6\,\mathrm{cm}^2 - 2\,\mathrm{cm}^2) = 2.8\,\mathrm{m}.$$

b) Für das Gesamtdrehmoment gilt

$$\frac{\ddot{x}(t)}{R} I = x(t) l d \rho g R - \mu_G g \rho l \pi (R^2 - r^2) r,$$

wobei $I = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) = \rho l \pi (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$ das Trägheitsmoment der Rolle bezeichnet. Wir erhalten also $\ddot{x}(t) = a x(t) - b$ mit

$$a = \frac{l d \rho g R^2}{I} = \frac{d g R^2}{\pi (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}$$

und

$$b = \frac{\mu_G g \rho l \pi (R^2 - r^2) r R}{I} = \frac{\mu_G g \pi r R}{\pi (R^2 + r^2)}.$$

Mit dem Ansatz $x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} + c_3$ erhalten wir

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 (c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}) = a (c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} + c_3) - b.$$

Also muss $\lambda = \sqrt{a}$ und $c_3 = \frac{b}{a}$ gelten. Mit den Anfangsbedingungen gilt $x(0) = x_0 = c_1 + c_2 + \frac{b}{a}$ und $\dot{x}(0) = v_0 = \sqrt{a} c_1 - \sqrt{a} c_2$. Also gilt $c_1 = \frac{v_0}{\sqrt{a}} + c_2$ und somit $x_0 = \frac{v_0}{\sqrt{a}} + 2 c_2 + \frac{b}{a}$. Wir erhalten also

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{b}{a} - \frac{v_0}{\sqrt{a}} \right)$$

und

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{b}{a} + \frac{v_0}{\sqrt{a}} \right).$$