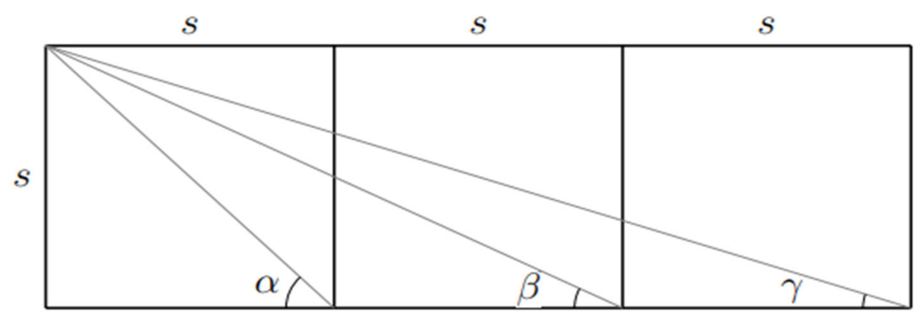
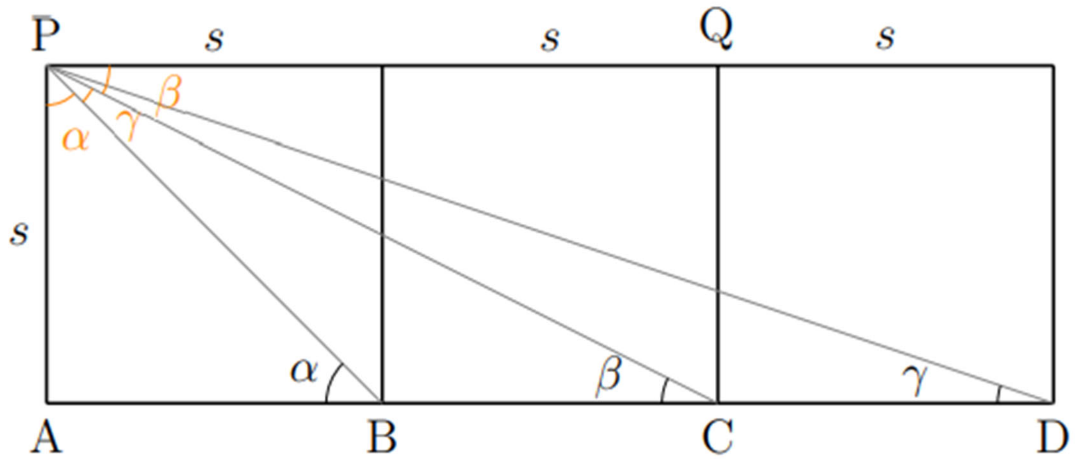
- On considère 3 carrés avec des côtés de longueur s, qui sont alignés sans espace. Les angles α, β et γ sont dessinés sur l'image. Démontre que α + β + γ = 90◦.



Solution:

En te référant à la figure ci-dessous.



Nous voulons montrer que les angles de couleur orange au point P correspondent effectivement à α, β et γ. L'angle ∠AP B = α, car les côtés PA et PB sont de même longueur. L'angle ∠CP Q = β car AC et PQ sont parallèles. L'angle ∠BPC est quant à lui un peu plus difficile à déterminer. Nous montrons que les triangles △BPC et △BDP sont similaires. Les deux possèdent l'angle commun ∠CBP. De plus, les côtés adjacents ont le même rapport, car :

$$\frac{|PB|}{|BC|} = \sqrt{2} \text{ und } \frac{|BD|}{|PB|} = \frac{2|BC|}{\sqrt{2}|BC|} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, △BPC ∼ △BDP et nous pouvons déduire ∠BP C = ∠BDP = γ. En additionnant α + β + γ, on obtient l'angle ∠AP Q qui vaut bien 90°.

- Soit $n \in N$ un entier naturel. Montrer que $n(n + 2)(n + 5)(n + 7)$ est toujours divisible par 24.

Solution:

Nous montrons d'abord que $A = n(n + 2)(n + 5)(n + 7)$ doit être divisible par 3. Considérons pour cela n, n+2 et n+7. Si nous les divisons par le nombre 3 et déterminons leurs classes résiduelles, nous constatons que chacune appartient à une classe résiduelle différente. Si n a par exemple le reste 1 après division par 3, n+7 a le reste 2 et n+2 est divisible par 3. De même, nous constatons que les classes résiduelles sont également différentes si n appartient à la classe résiduelle 2 ou 0 (voir tableau). Nous pouvons donc en conclure qu'au moins un des nombres n, n + 2 et n + 7 doit être divisible par 3 et donc que A est également divisible par 3.

n	0	1	2
n+ 2	2	0	1
n+ 7	1	2	1

Le tableau montre les classes résiduelles possibles pour les nombres n, n + 2 et n + 7

Il faut à présent montrer que A est divisible par 8. Procède comme ci-dessus et vérifie que pour n, n + 2, n + 5 et n + 7, chaque classe résiduelle est représentée exactement une fois lors de la division par 4. En particulier, les classes résiduelles 0 et 2 apparaissent exactement une fois et, par conséquent, un nombre est divisible par 4 et un autre nombre est divisible par 2. Leur produit, et donc A, est divisible par 8.

- Deux cases d'angle diagonalement opposées sont enlevées d'un échiquier 8×8. Démontre qu'il est impossible de recouvrir ces figures avec 31 dominos.

Solution:

Colorie le champ 8×8 comme un échiquier. Tu remarqueras que les deux cases d'angle diagonalement opposées sont de la même couleur. Une fois retirées, il reste donc : 30 cases noires et 32 cases blanches ou 32 cases noires et 30 cases blanches. Cependant, un domino recouvre toujours une case blanche et une case noire ; il n'est ainsi pas possible de recouvrir l'échiquier avec 31 dominos.