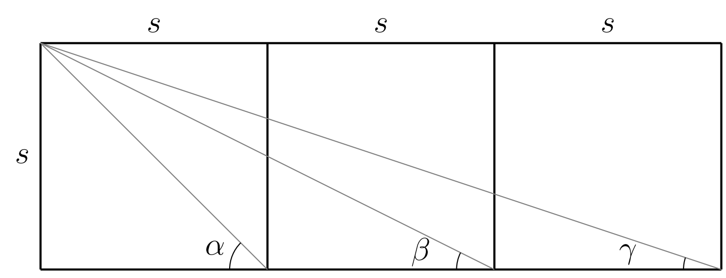
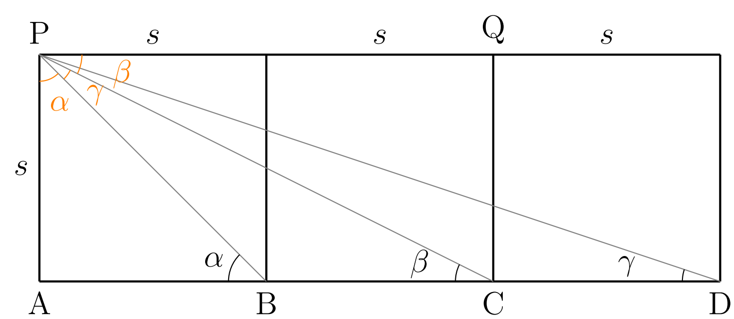
- Betrachte 3 Quadrate mit Seitenlänge s, welche lückenlos aneinander gereiht sind. Die Winkel α, β und γ sind im Bild eingezeichnet. Zeige, dass $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

  Lösung:

  Betrachte die nachfolgende Figur.

  Wir möchten zeigen, dass die orangefarbigen Winkel beim Punkt P tatsächlich α, β und γ entsprechen. Der Winkel $\angle APB = \alpha$, da die Seiten $|PA|$ und $|PB|$ gleich lang sind. Der Winkel $\angle CPQ = \beta$ da $|AC|$ und $|PQ|$ parallel sind. Der Winkel $\angle BPC$ ist ein wenig schwieriger zu bestimmen. Wir zeigen, dass die Dreiecke $\triangle BPC$ und $\triangle BDP$ ähnlich sind. Bermerke dazu, dass beide den gemeinsamen Winkel $\angle CBP$ besitzen. Zudem weisen die angrenzenden Seiten das gleiche Verhältnis auf, denn $\frac{|PB|}{|BC|} = \sqrt{2}$ und $\frac{|BD|}{|PB|} = \frac{2|BC|}{\sqrt{2}|BC|} = \sqrt{2}$. Damit glit tatsächlich $\triangle BPC \sim \triangle BDP$ und wir können $\angle BPC = \angle BDP = \gamma$ folgern. Addiert man nun $\alpha + \beta + \gamma$ erhält man den Winkel $\angle APQ = 90°$.

- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass $n(n+2)(n+5)(n+7)$ stets durch 24 teilbar ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $A = n(n + 2)(n + 5)(n + 7)$ durch 3 teilbar sein muss. Betrachte dazu n, $n+2$ und $n+7$. Teilen wir sie durch die Zahl 3 und bestimmen ihre Restklassen, stellen wir fest, dass jede einer anderen Restklasse zugehört. Hat beispielsweise n den Rest 1, so hat $n+7$ den Rest 2 und $n+2$ kann der Restklasse 0 zugeordnet werden. Analog finden wir, dass die Restklassen auch dann unterschiedlich sind, falls n zur Restklasse 2 oder 0 gehört (siehe Tabelle). Wir können also folgern, dass mindestens eine der Zahlen n, $n + 2$ und $n + 7$ durch 3 teilbar sein muss und damit auch A durch 3 teilbar ist.

n	0	1	2
n+ 2	2	0	1
n+ 7	1	2	1

Table 1: Die Tabelle zeigt die möglichen Restklassen für die Zahlen n, $n + 2$ und $n + 7$.

Es gilt nun noch zu zeigen, dass A durch 8 teilbar ist. Gehe dazu ähnlich vor wie oben und überzeuge dich, dass für n,$n + 2$, $n + 5$ und $n + 7$ jede Restklasse bei Division durch 4 genau einmal vertreten ist. Insbesondere kommen die Restklassen 0 und 2 genau 1 mal vor und folglich ist genau eine Zahl durch 4 teilbar, eine andere Zahl zudem durch 2. Ihr Produkt und damit auch A ist durch 8 teilbar.

- Von einem 8×8-Brett werden zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt. Zeige, dass es unmöglich ist, diese Figure mit 31 Dominosteinen zu bedecken.

Lösung: Färbe das 8×8 Feld wie ein Schachbrett. Bemerke nun, dass die zwei diagonal gegenüberliegenden Eckfelder beide die gleiche Farbe haben. Nach dem Entfernen bleiben also entweder 30 schwarze und 32 weisse Felder oder 32 schwarze und 30 weisse Felder. Ein Dominostein überdeckt aber stets ein weisses und ein schwarzes Feld, weshalb es nicht möglich ist, die Figur mit 31 Dominosteinen zu bedecken.