

Hydrodynamik

Aufwärmübungen

Hydrodynamik

i. Viviane und Sebastian möchten aus einem alten Wassertank ein U-Boot bauen.

- a) Angenommen der Wassertank hat ein Fassungsvermögen von 2000 Litern. Wie schwer müssen sie das U-Boot mindestens bauen, damit man damit tauchen kann?
 - b) Sie möchten bis zu 20m tief tauchen. Wie gross ist der Wasserdruck in dieser Tiefe?
 - c) Um aus dem U-Boot heraus schauen zu können, bauen sie ein rundes Fenster mit Radius $r = 20\text{cm}$ ein. Welche Kraft wirkt auf das Fenster in 20m Tiefe?
-
- a) They float if their mass is smaller than the mass of the water contained in the volume of the submarine. Or equivalently if their mean density is smaller than the density of water. Since water has a density of $1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, and since they want to dive and not to float, the minimal mass is 2000kg.
 - b) The pressure p at a distance h under the water surface is $p = \rho gh$ where $\rho = 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ is the density of water and $g = 9.81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ the gravitational constant. Therefore the pressure when diving at a depth of 20m is $p = 1.96 \cdot 10^5\text{Pa} = 1.96\text{bar}$.
 - c) The force F is $F = pA$ where $A = \pi r^2$ is the area of the window.

ii. Wenn es regnet, wird das Wasser auf einem Hausdach über einen Dachrinne gesammelt und fliesst über das vertikale Fallrohr in den Boden ab. Wir wollen im Folgenden ein Haus mit einem 5m langen Fallrohr betrachten und wir vernachlässigen jegliche Art von Reibung.

- a) Wie schnell fliesst das Wasser am unteren Ende des Fallrohres ?
 - b) Nun stellen wir ans untere Ende des Rohres ein Wasserrad. Angenommen es fließen 10 Liter pro Minute durch das Rohr, welche Leistung kann das Wasserrad (im Idealfall) produzieren?
-
- a) Each drop with mass m floating from the roof to the ground picks up the potential energy $E_{\text{pot}} = mgh$ (where h is the height) and converts it into kinetic energy $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Since this happens simultaneously for all drops (cancelling the mass m), the water floats with a speed of

$$v = \sqrt{2gh} = 9.9\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) A water stream of 10 litres per minute corresponds to a moved mass of $m = 10 \cdot \text{kg}$ per minute. The total energy of the water passing the water wheel in one minute is therefore

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = 490.5\text{J}.$$

Dividing by one minute (60s), we get a power of 8.18W.

iii. In dieser Aufgabe wollen wir den Bernoulli Effekt untersuchen. Dazu betrachten wir ein Rohrsystem mit einer Verengung, siehe Bild 1. An der engsten Stelle ist der Durchmesser halb so gross wie am Anfang und am Ende. Ein kleines Baby U-Boot lässt sich in der Strömung treiben, hat also immer die gleiche Geschwindigkeit wie das Wasser. Wir nehmen an, das Wasser fliesse an den weitesten Stellen mit einer Geschwindigkeit v_0 und wir vernachlässigen Reibung.

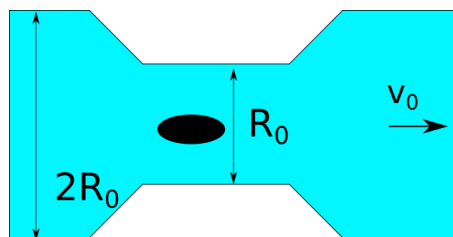


Abbildung 1:

- a) Wie schnell treibt das U Boot an der engsten Stelle?
- b) Wenn es von der weitesten in die engste Stelle treibt, beschleunigt das U-Boot, daher nimmt die kinetische Energie zu. Wie gross ist diese Zunahme, angenommen das U-Boot habe eine Masse m ?
- c) Woher nimmt das U-Boot die Energie zum Beschleunigen? Vergleiche mit der Bernoulli Gleichung.
- a) The volume per time floating though the widest positions is the same as the volume per time passing the narrowest parts. This is the continuity equation which leads to $v_0\pi(2R_0)^2 = v_i\pi R_0^2$ where $v_i = 4v_0$ is the speed in the narrowest location.
- b) The kinetic energy at the widest sections is $0.5mv_0^2$ and at the narrowest sections $0.5m(4v_0)^2$. Therefore the energy increases by a factor 16 or an absolute increase of $15/2mv_0^2$.
- c) The energy comes from the water pressure being higher at the wide sections and lower at the smaller sections. At the passage from the widest to the narrowest section, the submarine gets pushed by the higher pressure in the widest part towards the lower pressure in the narrowest part. To compute the pressure, we use Bernoulli's equation $p_0 + 0.5\rho v_0^2 = p_i + 0.5\rho v_i^2$ where ρ is the water density and the index i denotes the pressure and speed in the narrowest area. Using $v_i = 4v_0$ and comparing the pressure difference $p_0 - p_i = 0.5\rho(v_i^2 - v_0^2) = 15/2\rho v_0^2$. Using that the density of the submarine is the same as of water (otherwise it would not float), and multiplying the pressure difference by the volume of the submarine $V = m/\rho$, we get $V(p_0 - p_i) = 15/2mv_0^2$. The energy therefore comes from the pressure difference. This is not surprising as the Bernoulli equation was derived from energy conservation.