

Hydrodynamique

Warm-Up questions

Hydrodynamique

i. Viviane et Sébastien veulent construire un sous-marin à partir d'un vieux réservoir d'eau.

- a) En supposant que le réservoir a une capacité de 2000 litres, quel est le poids minimal nécessaire du sous-marin, pour lui permettre de plonger?
 - b) Ils souhaitent plonger jusqu'à une profondeur de 20m. Quelle est la pression de l'eau à cette profondeur?
 - c) Pour pouvoir regarder à l'extérieur du sous-marin, ils installent une fenêtre circulaire de rayon $r = 20\text{cm}$. Quelle force est appliquée à la fenêtre à 20m de profondeur?
- a) They float if their mass is smaller than the mass of the water contained in the volume of the submarine. Or equivalently if their mean density is smaller than the density of water. Since water has a density of $1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, and since they want to dive and not to float, the minimal mass is 2000kg.
 - b) The pressure p at a distance h under the water surface is $p = \rho gh$ where $\rho = 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ is the density of water and $g = 9.81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ the gravitational constant. Therefore the pressure when diving at a depth of 20m is $p = 1.96 \cdot 10^5\text{Pa} = 1.96\text{bar}$.
 - c) The force F is $F = pA$ where $A = \pi r^2$ is the area of the window.

ii. Quand il pleut, l'eau est recueillie sur le toit par une gouttière et s'écoule dans le sol par un tuyau vertical. Dans la suite, nous voulons étudier une maison avec un tuyau vertical de 5m, en négligeant tout type de frottement.

- a) Quelle est la vitesse de l'eau à l'extrémité inférieure du tuyau?
 - b) A présent, nous mettons une roue à eau à l'extrémité inférieure du tuyau. En supposant que 10 litres passent dans le tuyau, quelle puissance la roue à eau peut-elle produire (idéalement)?
- a) Each drop with mass m floating from the roof to the ground picks up the potential energy $E_{\text{pot}} = mgh$ (where h is the height) and converts it into kinetic energy $E_{\text{kin}} = 1/2mv^2$. Since this happens simultaneously for all drops (cancelling the mass m), the water flows with a speed of

$$v = \sqrt{2gh} = 9.9\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) A water stream of 10 litres per minute corresponds to a moved mass of $m = 10 \cdot \text{kg}$ per minute. The total energy of the water passing the water wheel in one minute is therefore

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = 490.5\text{J}.$$

Dividing by one minute (60s), we get a power of 8.18W.

iii. Dans cet exercice, nous voulons étudier l'effet Bernoulli. Pour cela, nous considérons un système de tuyau avec un rétrécissement, voir la figure 1. Au point le plus étroit, le diamètre est deux fois plus petit qu'au début et à la fin. Un bébé sous-marin se laisse entraîner par le courant, il a donc toujours la même vitesse que l'eau. Nous supposons que l'eau coule à une vitesse v_0 aux points les plus larges et nous négligeons les frottements.

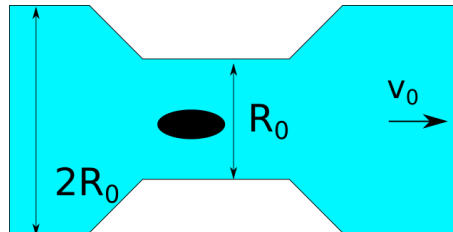


Figure 1:

1. A quelle vitesse le sous-marin dérive-t-il au point le plus étroit?
 2. Quand il dérive de l'endroit le plus large à l'endroit le plus étroit, le sous-marin accélère, et donc l'énergie cinétique augmente. De combien est cette augmentation, si on suppose que le sous-marin ait une masse de m ?
 3. D'où vient l'énergie pour accélérer le sous-marin? comparer avec l'équation de Bernoulli.
- a) The volume per time floating through the widest positions is the same as the volume per time passing the narrowest parts. This is the continuity equation which leads to $v_0\pi(2R_0)^2 = v_i\pi R_0^2$ where $v_i = 4v_0$ is the speed in the narrowest location.
 - b) The kinetic energy at the widest sections is $0.5mv_0^2$ and at the narrowest sections $0.5m(4v_0)^2$. Therefore the energy increases by a factor 16 or an absolute increase of $15/2mv_0^2$.
 - c) The energy comes from the water pressure being higher at the wide sections and lower at the smaller sections. At the passage from the widest to the narrowest section, the submarine gets pushed by the higher pressure in the widest part towards the lower pressure in the narrowest part. To compute the pressure, we use Bernoulli's equation $p_0 + 0.5\rho v_0^2 = p_i + 0.5\rho v_i^2$ where ρ is the water density and the index i denotes the pressure and speed in the narrowest area. Using $v_i = 4v_0$ and comparing the pressure difference $p_0 - p_i = 0.5\rho(v_i^2 - v_0^2) = 15/2\rho v_0^2$. Using that the density of the submarine is the same as of water (otherwise it would not float), and multiplying the pressure difference by the volume of the submarine $V = m/\rho$, we get $V(p_0 - p_i) = 15/2mv_0^2$. The energy therefore comes from the pressure difference. This is not surprising as the Bernoulli equation was derived from energy conservation.