Mechanik 1

Aufwärmübungen

Kinematik (Kapitel 2.2)

i. Alice wirft einen Ball nach oben. Sie will, dass der Ball die Höhe ihrer Schulmauer erreicht, welche $7\,\mathrm{m}$ hoch ist, wie sie von einem Klassenkameraden erfährt. Alice wirft dabei den Ball von $1\,\mathrm{m}$ über Boden. Wir vernachlässigen den Luftwiderstand.

a) **Alice wirft den Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $18\,\mathrm{km/h}$ nach oben. Erreicht der Ball die Höhe der Mauer?**

b) **Was für eine minimale Anfangsgeschwindigkeit benötigt der Ball um die Höhe der Mauer zu erreichen?**

c) **Was wäre in diesem Fall die Aufprallgeschwindigkeit des Balles auf dem Boden?**

a) The ball raises up to the height $h = -0.5gt^2 + v_0t + x_0$ with $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ and t the time taken by the ball to reach its maximal height.

To find t we have to remember that the speed of the ball at the top of its trajectory is zero. So $v_{top} = v_0 - gt = 0\,\mathrm{m/s}$ and $t = v_0/g$.

Putting this result into the first equation, we get $h = 2.27\,\mathrm{m} < 7\,\mathrm{m}$. So, the ball doesn't reach the top of the wall.

b) As before $t = v_0/g$ and $h = -0.5gt^2 + v_0t + x_0$, this time v_0 is unknown and $h = 7\,\mathrm{m}$. Solving the system of equation, we get $v_0 = \sqrt{2g(h - x_0)} = 10.8\,\mathrm{m/s}$.

c) After it reaches the top of its trajectory, the ball will move downwards. We again have both equations $x_1 = -0.5gt^2 - v_{top}t + h$ and $v_1 = v_{top} + gt$ with $x_1 = 0\,\mathrm{m}$, $v_{top} = 0\,\mathrm{m/s}$ and $h = 7\,\mathrm{m}$.

With the first equation, we find $t = \sqrt{2h/g}$. Hence $v_1 = \sqrt{2gh} = 11.7\,\mathrm{m/s}$.

ii. Als Denis am Salat schleudern ist, wundert er sich mit was für einer Geschwindigkeit die Salatblätter am Rande der Salatschleuder rotieren. Die Salatschleuder hat einen Durchmesser von $30\,\mathrm{cm}$ und macht 9 Umdrehungen in $2\,\mathrm{s}$.

a) **Mit was für einer Geschwindigkeit rotieren die Salatblätter am Rande der Salatschleuder?**

b) **Was ist deren Beschleunigung?**

Nach dem Öffnen der Salatschleuder, entdeckt Denis, dass mehr Blätter am Rand der Schleuder sind als zuvor. Jedoch hat Denis gelernt, dass der Beschleunigungsvektor, entgegengesetzt zur Richtung des Positionsvektor, in die Mitte der Schleuder zeigt.

c) Erkläre wieso die Salatblätter sich zum Rande der Schleuder bewegt haben.

a) At the boundary, the salad moves a distance $d = N \cdot 2\pi r$ in $t = 2\,\text{s}$, with $r = 0.15\,\text{m}$ being the radius and $N = 9$ the number of rotations during the time interval t. Thus, the speed is $v = d/t = 4.24\,\text{m/s}$.

b) The speed is constant, but the velocity not since the salad doesn't always move in the same direction. The acceleration is perpendicular to the movement, towards the centre of the circular motion. Its magnitude is $a = v^2/r = 120\,\text{m/s}^2$.

c) The acceleration's vector is due to the force applied by the boundary to the salad. This force does not let the salad escape the salad dryer. In the other hand, the salad placed in the middle of the dryer can continue its motion in a straight line, until it reaches the dryer's boundary.

Dynamik (Kapitel 2.3)

iii. Ein Holzblock der Masse $2\,\text{kg}$ ist auf einer Rampe platziert. Der Haftreibungskoeffizient μ_s ist 0.6 und der Gleitreibungskoeffizient μ_d ist 0.4.

a) Was ist der maximale Winkel der Rampe, sodass der Block nicht zu rutschen beginnt?

b) Angenommen die Rampe ist bei diesem Maximalwinkel und wir stossen den Block leicht an. Beschreibe die Bewegung des Blockes.

a) Three forces act on the block: the gravitational force, the support N exercised by the ramp and the friction. Their projection on an axis parallel to the ramp gives $ma_{\parallel} = mg\sin(\theta) - \mu_s N$ and their projection on a perpendicular axis gives $ma_{\perp} = N - mg\cos(\theta)$ where θ is unknown.

Since the block is at rest both $a_{\parallel}$ and $a_{\perp}$ are zero and we obtain: $\mu_s = \tan(\theta)$. So, the maximal angle is $\theta = \arctan(\mu_s) = 31.0°$.

b) Since the bloc is now moving, the dynamical friction coefficient μ_d should be used. It is lower than μ_s, so the friction force will not be big enough to counteract the gravitational force and the block will accelerate down the ramp.

iv. Fred fährt mit $60\,\text{km/h}$ auf einer Landstrasse. Plötzlich taucht ein Reh auf und Fred bremst ab. Nach $1.5\,\text{s}$ fährt er mit $10\,\text{km/h}$ und das Reh verschwindet. Wir wissen, dass die Masse des Autos und Fred zusammen $800\,\text{kg}$ ist. Was ist die durschnittliche Kraft auf Fred während des Bremsens?

We can use Newton's law: $\sum F = ma = \frac{dp}{dt}$ with $p = mv$ the momentum. Since we are interested in the average force, we must divide the variation of the momentum by the time interval: $\langle F \rangle = (mv_1 - mv_0)/\Delta t = 7410\,\text{N}$ with v_0 and v_1 the initial respectively final velocities.

v. Wir nehmen an, dass der Mond sich auf einer kreisförmigen Bahn um die Erde bewegt.

a) Was ist die Geschwindigkeit des Mondes?

b) Mit welcher Periode kreist der Mond um die Erde?

Einige nützliche Informationen: Distanz zwischen Erde und Mond 3.84×10^5 km**, Masse der Erde** 5.97×10^{24} kg

a) The only force felt by the Moon is the gravitational force. Thus $F = GmM/r^2 = ma$ with G the gravitational constant, m the mass of the Moon, M the mass of the Earth and r the distance between them. The acceleration of the circular uniform motion is $a = v^2/r$, with v the speed of the Moon.

Using both equations, we get $v = \sqrt{GM/r} = 1020\,\mathrm{m/s}$.

b) The revolution period is the time the Moon takes to make one revolution around the Earth. $T = d/v = 2\pi r/v = 2.37 \cdot 10^6\mathrm{s} = 27.4\,\mathrm{days}$.

Arbeit und Energie (Kapitel 2.4)

vi. Zwei Bälle sind an den Enden eines Stabes fixiert. Die Bälle wiegen 2 kg **und** 3 kg **und die Länge des Stabes ist** 1 m**. Wir nehmen an, dass die Masse des Stabes vernachlässigbar ist. Der Stab rotiert mit einer Geschwindigkeit von 10 Rotationen pro Minute um den Schwerpunkt.**

a) Was ist die Rotationsenergie des Systems?

b) Was ist das Trägheitsmoment des Systems?

c) Was ist der Drehimpuls des Systems?

d) Wie ändern diese Grössen, falls das System um den geometrischen Mittelpunkt rotiert?

a) We first must find the centre of mass of the system. We place the x-axis along the bar, with the origin on the lightest ball. Then, the position of the centre of mass $x_c = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} = 0.6\,\mathrm{m}$ with $l = 1\,\mathrm{m}$ the length of the bar $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ and $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$.

The rotation energy is due to the kinetics energy of the rotating body, so $E_{rot} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 x_c^2 + m_2(l - x_c)^2\right) = 0.658\,\mathrm{J}$ where $\omega = 2\pi 10\,\mathrm{min}^{-1} = 1.05\,\mathrm{s}^{-1}$.

b) The moment of inertia is $I = \sum_i r_i^2 m_i = x_c^2 m_1 + (l - x_c)^2 m_2 = 1.2\,\mathrm{m^2kg}$.

c) The angular momentum is $L = I\omega = 1.26\,\mathrm{m^2kg/s}$.

d) All the computations are the same as before, with $x_c = l/2 = 0.5\,\mathrm{m}$. Hence $E_{rot} = 0.685\,\mathrm{J}$, $I = 1.25\,\mathrm{m^2kg}$ and $L = 1.31\,\mathrm{m^2kg/s}$.