Optique

Warm-Up questions

Optique

i. Le soleil a un rayon $r_s = 700000\text{km}$ **et se situe à une distance** $R_s = 150$ **millions** km **de la Terre, alors que la lune à un rayon** $r_m = 1700\text{km}$ **et se situe à une distance** $R_m = 0.38$ **million** km**. Lors d'une éclipse totale du soleil, la lune couvre complètement le soleil. Alors que, lors d'une éclipse lunaire, la lune est dans l'ombre de la terre (le rayon de la terre est** $r_e = 6400\text{km}$**). Pourquoi une éclipse lunaire est-elle toujours visible lorsque la terre se trouve entre le soleil et la lune, alors que nous ne voyons pas toujours l'éclipse totale du soleil lorsque la lune se trouve entre le soleil et la terre ?**

Since the earth is much bigger than the moon, its shadow will be much bigger, see 1.

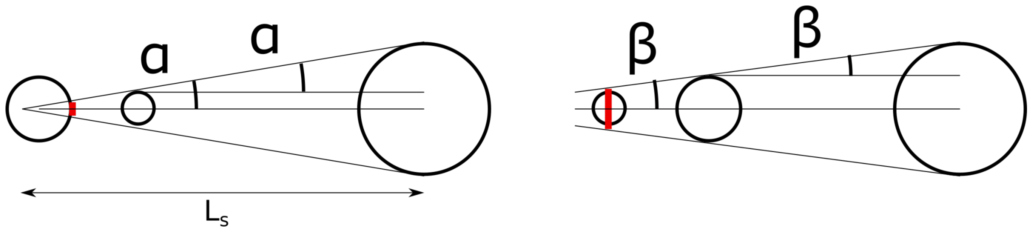

Figure 1:

In case of the solar eclipse, we can estimate the diameter of the moon's shadow by computing the opening angle α of the shadow cone by

$$\tan(\alpha) = \frac{r_s - r_m}{R_s - R_e}.$$

The distance from the apex of the cone to the sun L_s is then given by

$$L_s = \frac{r_s}{\tan(\alpha)}.$$

From this we can compute the radius of the shadow S_e on the earth surface

$$S_e = \tan(\alpha)(L_s - R_s) \approx 1700\text{km}$$

which is roughly one quarter of the earth radius. Therefore it depends where you are standing on the earth whether you can see the solar eclipse or not. Doing an analogous computation for the lunar eclipse, we find the following quantities

$$\tan(\beta) = \frac{r_s - r_e}{R_s}$$
$$L_m = \frac{r_s}{\tan(\beta)}$$
$$S_m = \tan(\beta)(L_m - R_s + R_m) \approx 8200\text{km}$$

which is almost five times bigger than the radius of the moon.

ii. Deux miroirs qui se touchent le long d'un bord sont placés l'un à côté de l'autre et forment un angle de 60°. Tu te tiens entre les miroirs. Combien de fois vois-tu ton image devant toi ? Et pour quel angle te vois-tu un nombre entier de fois ?

Let's denote the two mirrors by mirror 1 and mirror 2. Mirror 1 shows an image of you, see 2. Mirror 2 mirrors the image of mirror 1 and this goes on like this. In the end you see yourself at the edges of a regular 6 polygon, hence you see yourself 5 times.

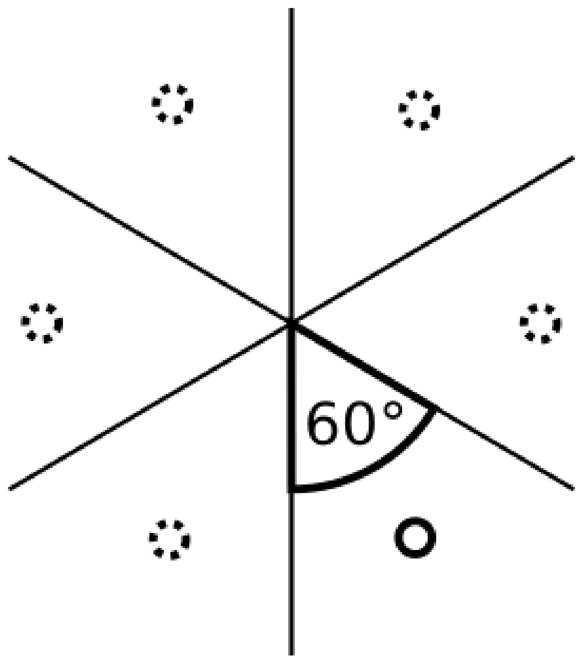

Figure 2:

In general the angle α between the mirrors and the number of mirrored images n are connected via $(n+1) \cdot \alpha = 360°$. Therefore all possible angles are

$$\alpha = \frac{360°}{n+1}$$

for any natural number n.

iii. Quelle est la taille minimale du miroir pour que vous puissiez vous voir entièrement dans le miroir lorsque vous vous tenez devant lui ?

The mirror has to be at least half as big as you. To see this, consider figure 3. Your mirrored image has the same size as you. Drawing the rays from your eyes to your mirrored head and feed, we can apply the intersect theorem and see, that the mirror has to be half the size of you.

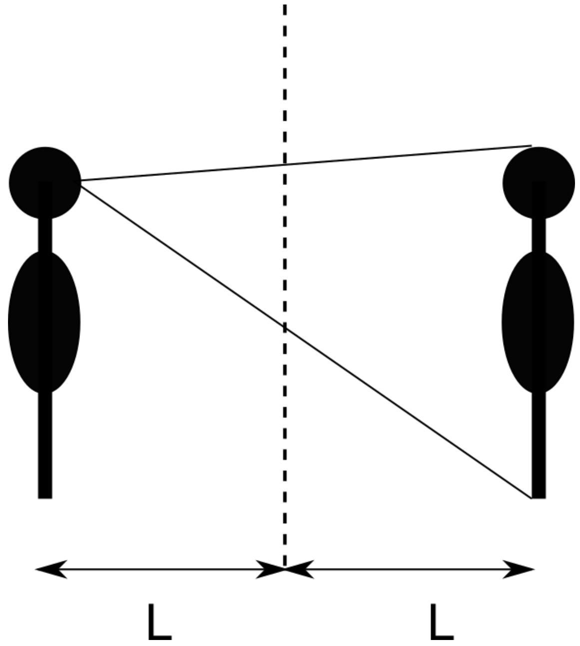

Figure 3:

iv. Un thermomètre est fabriqué à partir d'un tube de verre cylindrique, dont le rayon intérieur est $r = 0.5$mm et le rayon extérieur est $R = 1.5$mm. L'indice de réfraction du verre est $n_1 = 1.5$ et celui de l'air est $n_2 = 1$. Quelle épaisseur semble avoir le rayon intérieur r' lorsque l'on regarde depuis le côté du thermomètre ? Indice : On suppose, pour simplifier, que les rayons se propagent parallèlement à travers le thermomètre (voir figure 4)

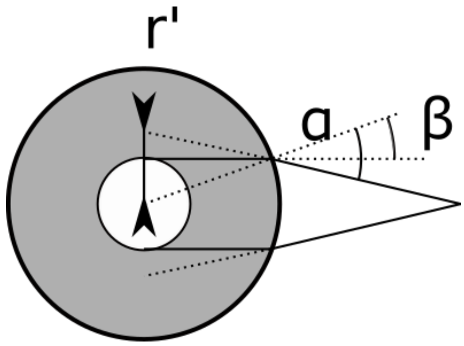

Figure 4:

Since the rays propagate parallel through the thermometer, each ray encloses an angle β with the surface normal given by

$$\sin(\beta) = \frac{r}{R}.$$

The length of each parallel ray is

$$L = \cos(\beta)R.$$

To compute the refracted angle, we use Snell's law and find

$$n_2 \sin(\alpha) = n_1 \sin(\beta).$$

The apparent radius of the inner radius is then

$$r' = r + \tan(\alpha - \beta)L = 0.76\text{mm}.$$

Alternatively one can also compute the distance from the thermometer to the eye L_e which is

$$L_e = \frac{r}{\tan(\alpha - \beta)}$$

and then compute the apparent diameter by

$$r' = \tan(\alpha - \beta)(L_e + L) = 0.76\text{mm}.$$

v. Un prisme est un morceau de verre triangulaire ($n = 1.3$), voir figure 5. Supposons que l'angle au sommet soit $90°$ et que le rayon incident forme un angle de $\alpha = 60°$ par rapport à la normale de la surface.

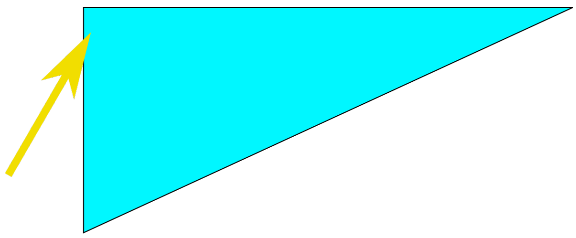

Figure 5:

a) **Tracer qualitativement le trajet de la lumière dans le prisme ?**

b) **Quelle est l'angle β par rapport à la normale (perpendiculaire) de la surface après que le rayon ait été réfracté ?**

c) **Quelle est la distance parcourue par le rayon dans le prisme lorsque le rayon incident frappe le prisme à une distance de 5mm de son sommet à angle droit ?**

d) **En combien de temps la lumière traverse-t-elle le prisme ?**

e) **Quand la lumière atteint l'autre surface, quel angle forme-t-elle avec la normale de cette surface ?**

f) **Quel est l'angle de sortie (dans l'air) de la lumière par rapport à la normale de la seconde surface ?**

g) **Quel est l'angle incident minimal α pour lequel la lumière peut sortir du prisme à travers la seconde surface (pour un angle plus petit, elle serait complétement réfléchie) ?**

a) see figure 6

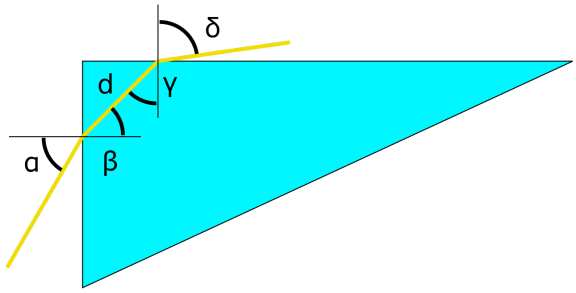

Figure 6:

b) We use Snells law $\sin(\alpha) = n \sin(\beta)$ which leads to a $\beta = 42°$.

c) The propagation length l is $l = d/\sin(\beta) = 7.5\text{mm}$

d) The speed of light in the crystal is $v = c/n$ where c is the speed of light in vacuum. Hence we get a duration of $t = l/v = 3.2 \times 10^{-11}\text{s}$.

e) Using the apex angle being $90°$, the angle is $\gamma = 90° - \beta = 48°$.

f) We apply again Snell's law and get $\delta = \arcsin(\sin(\gamma)n) = \arcsin(\cos(\beta)n) = 76°$.

g) The critical angle is given for $\delta = 90°$ which means $\sin(\gamma) = 1/n$. Making again use of the $90°$ apex angle, we have $\cos(\beta) = \sin(\gamma) = 1/n$. Applying Snell's law and $\sin(\beta)^2 = 1 - \cos(\beta)^2$ we get an incidence angle α as

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arcsin(n \sin(\beta)) \\
&= \arcsin(n\sqrt{1 - \cos(\beta)^2}) \\
&= \arcsin(n\sqrt{1 - 1/n^2}) = 56°
\end{aligned}$$

which is the maximal incidence angle.

vi. Nous prenons une lentille avec une distance focale $f = 10\text{cm}$ et plaçons un objet à une distance $u = 15\text{cm}$ de la lentille.

a) Trouve la position de l'image de l'objet.

b) Maintenant nous plaçons un miroir à une distance $d = 10cm$ derrière la lentille. Dessine un schéma et construis l'image de l'objet. A quelle position est-elle maintenant ?

c) Imagine une expérience qui, à l'aide de ce montage, permettrait de déterminer la distance focale d'une lentille convexe. (Indice : choisis un u approprié)

a) We use the lens equation to determine the distance b of the image

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{b}$$

Solving for b leads to

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{u}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{10}\text{cm}^{-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{10}\text{cm}} \\ &= \frac{10}{\frac{1}{3}}\text{cm} = 30\text{cm}. \end{aligned}$$

b) See figure 7, the distance from the object is 10cm.

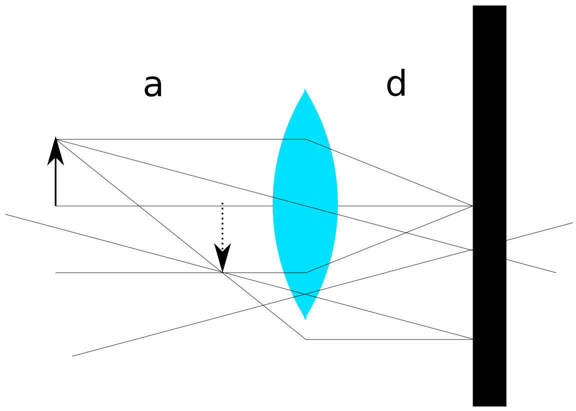

Figure 7:

c) When changing u to $u = f$, the rays after the lens are parallel. After being reflected at the mirror, they are still parallel and imaged at the same position as the object. Therefore the procedure to measure the focal length is the following: we put a screen right behind the object (ideally without any space in between object and screen). Then we move the lens until we get a sharp image on the screen. The distance between the lens and the screen/object is then the focal length.

vii. Tu aimerais projeter une pomme rouge (longueur d'onde 700nm**) avec un diamètre de** 5cm **sur un écran, de telle manière que la pomme apparaisse deux fois plus grande. La distance entre la pomme et l'écran est** 1.5m**. Pour la projection, tu utilises une fine lentille simple.**

a) Où positionnes-tu la lentille, c'est-à-dire quelle est la distance entre la pomme et la lentille ?

b) Quelle distance focale doit avoir la lentille afin de faire cette projection.

c) Un ver regarde au dehors de la pomme et te souris. Tu as une lentille avec un plus petit diamètre et une avec un plus grand diamètre. Laquelle utilises-tu afin d'avoir une meilleure résolution du ver ?

d) On considère que le ver à un diamètre de 0.1mm**. Quel est le diamètre minimal/maximal de la lentille afin d'en obtenir une image nette ?**

a) The ratio between the size of the object (apple) O and the Image I is equal to the ratio of the distance between the object and the lens o and the distance between image and lens i (this can be seen from the intersection theorem). Formally we get

$$\frac{O}{I} = \frac{o}{i}$$

and hence the the distance from the image to the lens is twice as big as the one from the apple to the lens and hence $o = 0.5\text{m}$ and $i = 1\text{m}$.

b) Knowing o and i, we can compute the focal length using the lens formula

$$f = \frac{1}{\frac{1}{o} + \frac{1}{i}} = \frac{1}{3}\text{m}.$$

c) To get a high resolution image, an optical system with big diameter optics is always preferable. Otherwise small optical elements have a similar effect as an aperture leading to diffraction.

d) To resolve the worm, we have to be able to resolve an angle of $\delta \approx \frac{0.1\text{mm}}{0.5\text{m}} = 0.0002$ rad. According to the diffraction formula

$$\sin(\delta) = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

where D is the diameter of the iris or in this case the lens, we get a minimal diameter of

$$D = 1.22\frac{\lambda}{\sin(\delta)} \approx 4.2\text{mm}.$$