

Mathematisch musizieren

Mit nichts als Wasser und ein paar Weingläsern bekannte Melodien spielen - das geht! In diesem Experiment werden mit selbst gemessenen Frequenzen Berechnungen angestellt, bis die Gläser richtig klimpern.

Für das Experiment benötigst du:

- Weingläser, Proseccogläser (am besten 6 gleiche)
- Wasser
- Waage
- Eine App, die Frequenzen misst (Playstore: Sound Analyzer Free, Appstore: n-Track Tuner). Alternativ kannst du die Frequenzen mit dem eigenen Gehör plus einer Frequenz-Generator App messen.
- Stift und Papier

Der Versuch besteht aus 2 Teilen. Der erste Teil ähnelt einem klassischen Physik-Experiment. Wir werden das Weinglas mit unterschiedlichen Wassermengen füllen und die Volumen-Frequenz Kennlinie unseres Glases bestimmen. Im zweiten Teil kannst du mit Hilfe der gemessenen Kennlinie herumspielen. Wir geben dir einige Tipps und Ideen, welche du ausprobieren kannst.

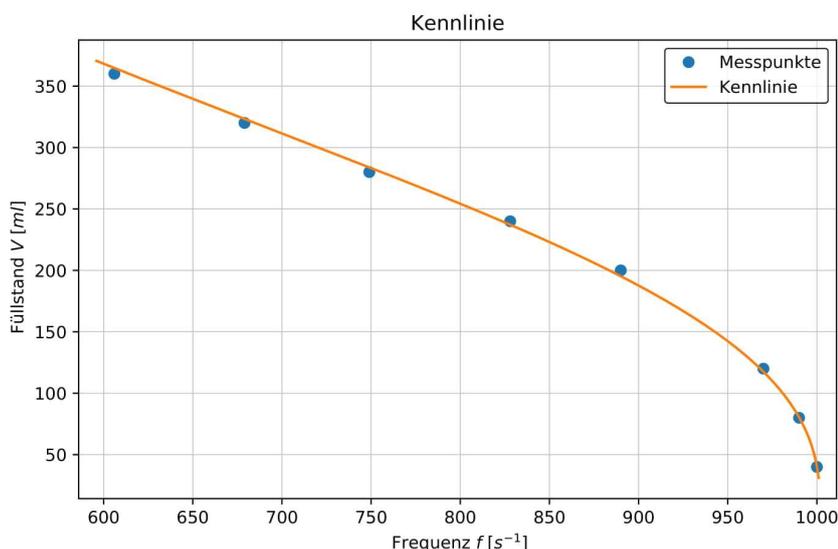
Erster Teil

Zur Bestimmung der Volumen-Frequenz-Kennlinie brauchen wir zuallererst einige Messdaten.

- 1.) Messe zuerst die Frequenzen der leeren Weingläser. Nehme für den Rest des ersten Teils jenes Glas mit der mittleren Frequenz.
- 2.) Fülle nun das Glas schrittweise auf. Bestimme nach jedem Schritt die Wassermenge im Glas. Am besten tust du dies mit Hilfe einer elektronischen Waage. Bestimme auch die jeweilige Tonhöhe.
Tipp: Bei den meisten Gläsern ändert sich die Tonhöhe anfangs sehr langsam, erst wenn das Glas halbgefüllt ist beginnt die Tonhöhe schneller anzusteigen. Versuche dort mehr Messungen zu machen, wo es grosse Änderungen der Tonhöhe gibt.
- 3.) Für ein genaues Ergebnis solltest du in etwa 8-10 verschiedene Füllstände vermessen haben.

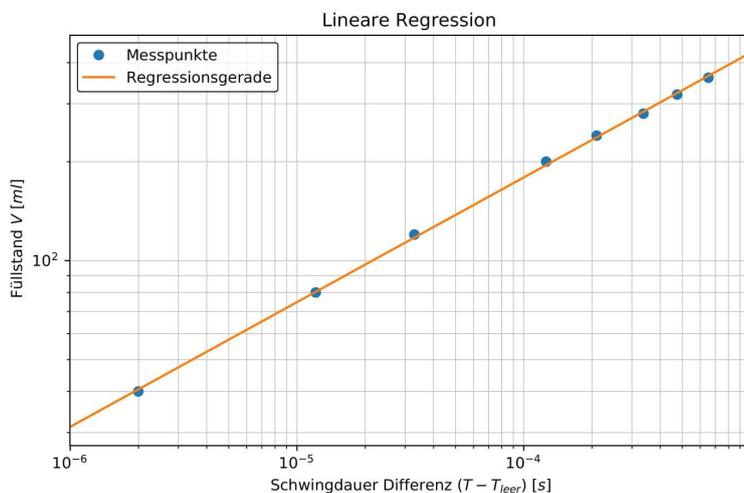
Jetzt kommen wir zum Analyseteil. Im Folgenden bezeichnen wir mit f_i die gemessenen Frequenzen in Hertz und mit V_i die Füllstände in Milliliter. Der Index i (in f_i und V_i) nummeriert die verschiedenen Messungen, d.h. wir bezeichnen beispielsweise die gemessene Frequenz der dritten Messung mit f_3 und den dazugehörigen Füllstand mit V_3 .

- 4.) Stelle nun deine Daten graphisch dar. Bilde dabei die Frequenzen auf der x-Achse und die Füllstände auf der y-Achse ab. Du solltest nun in etwa folgenden Graphen erhalten:



Wir suchen nun nach einer empirischen Formel, welche den von dir gezeichneten Graphen möglichst einfach beschreibt. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- 5.) Berechne für jede Frequenz f_i die Schwingdauer $T_i = \frac{1}{f_i}$
- 6.) Ziehe nun von jedem T_i die Schwingdauer des leeren Glases T_{leer} ab. Hierbei ist wiederum $T_{leer} = \frac{1}{f_{leer}}$, wobei f_{leer} die zu Beginn gemessene Frequenz des leeren Glases ist. Beachte: Je kleiner die Differenz $T_i - T_{leer}$ ist, desto mehr werden allfällige Ungenauigkeiten bei der Messung ins Gewicht fallen. Es kann deshalb von Vorteil sein die Messungen mit kleiner Differenz $T_i - T_{leer}$ für die Analyse wegzulassen (siehe Punkt 7). Völlig unbrauchbar sind Messwerte mit $T_i < T_{leer}$.
- 7.) Trage nun $\log(T_i - T_{leer})$ auf der x-Achse und $\log(V_i)$ auf der y-Achse auf. Du solltest eine mehr oder weniger gerade Linie erhalten:



Anmerkung: Für dieses Bild wurden die ursprünglichen Daten am Computer in einem log-log-Plot abgebildet, was ohne Computer oder log-log-Papier nicht so einfach möglich ist. Qualitativ ist ein auf Papier gezeichneter Graph gleichwertig.



Tipp: Die in Punkt 6 erwähnten problematischen Messwerte befinden sich im Graphen meist links unten. Es kann also gut sein, dass die übrigen Punkte eine schöne gerade Linie bilden auf welcher sich diese problematischen Punkte nicht befinden. Lasse sie in diesem Fall einfach weg.

- 8.) Bestimme für deine Gerade die Steigung m und den y-Achsenabschnitt a . Du kannst dies von Auge machen. Wenn du möchtest darfst du natürlich auch eine lineare Regression durchführen.
- 9.) Wie berechnet man nun den Füllstand in Milliliter für eine bestimmte gewünschte Frequenz? Schreibe deine Formel in Abhängigkeit von m , a und T_{leer} auf. **Lösung:**

$$V = e^a \left(\frac{1}{f} - T_{leer} \right)^m$$

Zweiter Teil

Mit dem Bestimmen der Kennlinie können wir nun beliebige Frequenzen erzeugen, indem wir die dazugehörigen Wassermengen ganz einfach mit der Waage abmessen. Als Erstes versuchen wir uns an den Tönen einer Durtonleiter.

- 1.) Schreibe jeweils auf, aus wie vielen Halbtönen der Tonabstand zum nächsten Ton der Durtonleiter besteht. **Lösung: Startend vom Grundton 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1 (wir brauchen aber nur die ersten 5 Tonabstände)**

Was hat dies nun mit den Frequenzen zu tun? Wir bemerken zuerst, dass sich die Frequenz für eine Oktave verdoppelt, d.h. die Frequenz des Grundtons ist die Hälfte der Frequenz des Tones, welcher eine Oktave über ihm liegt.

- 2.) Nehme nun an die Frequenz nimmt mit jedem Halbton um einen Faktor z zu. Wieviel ist z ? **Lösung: Es gibt 12 Halbtöne in der Oktave. Das heisst $z^{12} = 2$ oder $z = 2^{\frac{1}{12}}$.**
- 3.) Fange nun bei der niedrigsten Frequenz f_0 an, welche du gut mit deinem Glas erzeugen kannst. Welche Frequenzen haben nun die ersten 6 Töne in deiner Durtonleiter? **Lösung: $f_0, f_0 z^2, f_0 z^4, f_0 z^5, f_0 z^7, f_0 z^9$**
- 4.) Optional: Interessanterweise sollte sich die Frequenz für eine Quinte verdreizweitelfachen. Aus wie vielen Halbtonschritten besteht eine Quinte und um ein wie vielfaches vergrößert sich folglich die Frequenz für eine Quinte nach unseren Berechnungen? Diese Diskrepanz zeigt, dass wir unsere Instrumente im 12 Ton-System nie ganz richtig stimmen können. In der westlichen Musik hat sich die wohltemperierte Stimmung durchgesetzt, welche unseren Berechnungen mit den Halbtönen entspricht. Dadurch sind unsere Quinten aber immer etwas falsch.
- 5.) Berechne nun die Füllstände, welche zu den Frequenzen in Punkt 3 gehören und fülle sie in deine Weingläser ein.



Falls du anfangs festgestellt hast, dass die Grundfrequenzen deiner Gläser sehr unterschiedlich wird sich natürlich auch die Kennlinie der Gläser relativ stark unterscheiden. Um nicht für jedes Glas nochmals separat die Kennlinie messen zu müssen kannst du folgendes tun: Fülle alle Gläser etwa $\frac{3}{4}$ voll und messe wiederum den Füllstand $V_{\frac{3}{4}}$ und die Frequenz $f_{\frac{3}{4}}$. Finde nun für jedes der Gläser b , sodass gilt:

$$V_{\frac{3}{4}} = e^a \left(\frac{1}{f_{\frac{3}{4}}} - T_{leer} \right)^m + b$$

Vergiss dabei nicht auch das anfangs gemessene T_{leer} des jeweiligen Glases einzusetzen. Die Formel für die Kennlinie eines spezifischen Glases ist nun

$$V = e^a \left(\frac{1}{f} - T_{leer} \right)^m + b$$

Dabei sind m und a universell für alle Gläser, und T_{leer} und b für das jeweilige Glas einzusetzen.

6.) Du kannst nun einige einfache Lieder auf deinen Gläsern spielen. Im Folgenden bezeichnet 1 das Glas mit der niedrigsten und 6 das Glas mit der höchsten Frequenz. Einige Beispiele:

- Alle Meine Entlein: 123455 6666 5 6666 5 4444 33 2222 1
- Jingle Bells: 333 333 35123 4444433 32232 5, 333 333 35123 44444333 55421
- Hänschen klein: 533 422 1234555 533 422 13551
- Bruder Jakob: 1231 1231 345 345 565431 565431 1 5 1
- Funkel funkeln kleiner Stern: 11 55 66 5 44 33 22 1, 55 44 33 2 55 44 33 2, 11 55 66 5 44 33 22 1

7.) Das Gleiche können wir auch mit der Molltonleiter machen. Die Abstände in Halbtönen hier ist: 2, 1, 2, 2, 1

- Heart of Courage (Two Steps from Hell): 123 345 2346543
- Havana (Camila Cabello und Daddy Yankee): 355331 545654 355331 5456543 55331 545654353 5454352
- Sweet Dreams (Annie Lennox und Eurythmics): 13313 11 33 32 3131 33432
- Bad Guy (Billie Eilish): 33 3333 14 33 3333 14 33 3333 15 22 2217 (wir können hier unsere 6 Gläser so füllen, dass der tiefste Ton der siebte Ton der harmonischen Molltonleiter ist)

8.) Optional: Interessierte können versuchen die Oktave in mehr als 12 Halbtöne zu unterteilen. Finde beispielsweise einen Faktor z für welchen eine besonders reine Quinte zu erreichen ist. Berechne dann wiederum die Füllstände und schaue wie dieses Tonsystem klingt.