Meccanica 1

Warm-Up questions

Cinematica (Capitolo 2.2)

i. Alice lancia una palla verticalmente verso l'alto. Vuole che la palla raggiunga l'altezza del muro della scuola, che un compagno di classe le dice essere alto $7\,\mathrm{m}$**. Alice lancia la palla da** $1\,\mathrm{m}$ **di altezza da terra. Trascuriamo ogni attrito.**

a) **Alice lancia la palla verso l'alto con una velocità iniziale di** $18\,\mathrm{km/h}$**. La palla raggiungerà la cima del muro della scuola?**

b) **Che velocità iniziale minima deve avere la palla per raggiungere la cima del muro?**

c) **In questo caso, quale sarebbe la velocità finale della palla all'impatto con il suolo?**

a) The ball raises up to the height $h = -0.5gt^2 + v_0 t + x_0$ with $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $v_0 = 18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ and t the time taken by the ball to reach its maximal height.

   To find t we have to remember that the speed of the ball at the top of its trajectory is zero. So $v_{top} = v_0 - gt = 0\,\mathrm{m/s}$ and $t = v_0/g$.

   Putting this result into the first equation, we get $h = 2.27\,\mathrm{m} < 7\,\mathrm{m}$. So, the ball doesn't reach the top of the wall.

b) As before $t = v_0/g$ and $h = -0.5gt^2 + v_0 t + x_0$, this time v_0 is unknown and $h = 7\,\mathrm{m}$. Solving the system of equation, we get $v_0 = \sqrt{2g(h - x_0)} = 10.8\,\mathrm{m/s}$.

c) After it reaches the top of its trajectory, the ball will move downwards. We again have both equations $x_1 = -0.5gt^2 - v_{top}t + h$ and $v_1 = v_{top} + gt$ with $x_1 = 0\,\mathrm{m}$, $v_{top} = 0\,\mathrm{m/s}$ and $h = 7\,\mathrm{m}$.

   With the first equation, we find $t = \sqrt{2h/g}$. Hence $v_1 = \sqrt{2gh} = 11.7\,\mathrm{m/s}$.

ii. Mentre Denis sta usando la sua centrifuga per l'insalata, si chiede a quale velocità ruotano le foglie lungo il perimetro della centrifuga. Quest'ultima ha un diametro di $30\,\mathrm{cm}$ **e compie 9 rotazioni in** $2\,\mathrm{s}$**.**

a) **A che velocità ruotano le foglie lungo il perimetro?**

b) **Qual è la loro accelerazione?**

Aprendo la centrifuga, Denis scopre che ci sono più foglie sul perimetro della centrifuga rispetto a prima. Tuttavia, Denis ha imparato a scuola che il vettore di accelerazione si oppone al vettore di posizione, e dovrebbe quindi puntare verso il centro.

c) Spiega perché le foglie si sono spostate verso il perimetro.

a) At the boundary, the salad moves a distance $d = N \cdot 2\pi r$ in $t = 2\,\text{s}$, with $r = 0.15\,\text{m}$ being the radius and $N = 9$ the number of rotations during the time interval t. Thus, the speed is $v = d/t = 4.24\,\text{m/s}$.

b) The speed is constant, but the velocity not since the salad doesn't always move in the same direction. The acceleration is perpendicular to the movement, towards the centre of the circular motion. Its magnitude is $a = v^2/r = 120\,\text{m/s}^2$.

c) The acceleration's vector is due to the force applied by the boundary to the salad. This force does not let the salad escape the salad dryer. In the other hand, the salad placed in the middle of the dryer can continue its motion in a straight line, until it reaches the dryer's boundary.

Dinamica (Capitolo 2.3)

iii. Un blocco di legno di massa $2\,\text{kg}$ è posto su una rampa. Il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.6$, mentre il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.4$.

a) Qual è l'angolo massimo di inclinazione della rampa in modo che il blocco non scivoli?

b) La rampa si trova all'angolo di inclinazione massimo calcolato sopra. Spingiamo leggermente il blocco. Descrivi la velocità del blocco in funzione del tempo.

a) Three forces act on the block: the gravitational force, the support N exercised by the ramp and the friction. Their projection on an axis parallel to the ramp gives $ma_{\parallel} = mg\sin(\theta) - \mu_s N$ and their projection on a perpendicular axis gives $ma_{\perp} = N - mg\cos(\theta)$ where θ is unknown.

Since the block is at rest both $a_{\parallel}$ and $a_{\perp}$ are zero and we obtain: $\mu_s = \tan(\theta)$. So, the maximal angle is $\theta = \arctan(\mu_s) = 31.0°$.

b) Since the bloc is now moving, the dynamical friction coefficient μ_d should be used. It is lower than μ_s, so the friction force will not be big enough to counteract the gravitational force and the block will accelerate down the ramp.

iv. Fred sta guidando a una velocità di $60\,\text{km/h}$ lungo una strada di campagna. Improvvisamente, un cervo attraversa la strada e Fred rallenta. Dopo $1.5\,\text{s}$ la velocità è di $10\,\text{km/h}$ e il cervo è scomparso. Sapendo che la massa combinata di Fred e l'auto è $800\,\text{kg}$, qual è la forza media applicata durante la decelerazione?

We can use Newton's law: $\sum F = ma = \frac{dp}{dt}$ with $p = mv$ the momentum. Since we are interested in the average force, we must divide the variation of the momentum by the time interval: $\langle F \rangle = (mv_1 - mv_0)/\Delta t = 7410\,\mathrm{N}$ with v_0 and v_1 the initial respectively final velocities.

v. Assumiamo che la Luna si muova intorno alla Terra su un'orbita circolare.

a) Qual è la velocità della Luna?

b) Qual è il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra?

Informazioni utili: la distanza tra la Terra e la Luna è $3.84 \times 10^5\,\mathrm{km}$ **e la massa della Terra è** $5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$**.**

a) The only force felt by the Moon is the gravitational force. Thus $F = GmM/r^2 = ma$ with G the gravitational constant, m the mass of the Moon, M the mass of the Earth and r the distance between them. The acceleration of the circular uniform motion is $a = v^2/r$, with v the speed of the Moon.

Using both equations, we get $v = \sqrt{GM/r} = 1020\,\mathrm{m/s}$.

b) The revolution period is the time the Moon takes to make one revolution around the Earth. $T = d/v = 2\pi r/v = 2.37 \cdot 10^6\mathrm{s} = 27.4\,\mathrm{days}$.

Energia (Capitolo 2.4)

vi. Due palle pesanti rispettivamente $2\,\mathrm{kg}$ **e** $3\,\mathrm{kg}$ **sono fissate alle estremità di un'asta lunga** $1\,\mathrm{m}$ **di massa trascurabile. L'asta ruota intorno al proprio centro di massa a una velocità di 10 rotazioni al minuto.**

a) Qual è l'energia rotazionale del sistema?

b) Qual è il momento d'inerzia del sistema?

c) Qual è il momento angolare del sistema?

d) Come cambiano queste quantità se l'asta ruota intorno al suo centro geometrico?

a) We first must find the centre of mass of the system. We place the x-axis along the bar, with the origin on the lightest ball. Then, the position of the centre of mass $x_c = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} = 0.6\,\mathrm{m}$ with $l = 1\,\mathrm{m}$ the length of the bar $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ and $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$.

The rotation energy is due to the kinetics energy of the rotating body, so $E_{rot} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{\omega^2}{2}\left(m_1 x_c^2 + m_2 (l - x_c)^2\right) = 0.658\,\mathrm{J}$ where $\omega = 2\pi 10\,\mathrm{min}^{-1} = 1.05\,\mathrm{s}^{-1}$.

b) The moment of inertia is $I = \sum_i r_i^2 m_i = x_c^2 m_1 + (l - x_c)^2 m_2 = 1.2\,\mathrm{m^2kg}$.

c) The angular momentum is $L = I\omega = 1.26\,\mathrm{m^2kg/s}$.

d) All the computations are the same as before, with $x_c = l/2 = 0.5\,\mathrm{m}$. Hence $E_{rot} = 0.685\,\mathrm{J}$, $I = 1.25\,\mathrm{m^2kg}$ and $L = 1.31\,\mathrm{m^2kg/s}$.