PHYSICS.
OLYMPIAD.CH
PHYSIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE PHYSIQUE
OLIMPIADI DELLA FISICA

Olimpiadi di Fisica

Secundo turno

18 gennaio 2023

Parte 1	**:**	**21 domande a scelta multipla**
Durata	:	60 minuti
Totale	:	21 punti (21×1)
Parte 2	**:**	**3 problemi lunghi**
Durata	:	120 minuti
Totale	:	48 punti (3×16)
Materiale autorizzato	:	Calcolatrice non programmabile
		Materiale per scrivere e disegnare

Buon lavoro!

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung, Forschung und Innovation
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
EMPA - Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

#bbad1b62

Costanti fondamentali

Frequenza iperfina del cesio	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	$9.192\,631\,770$	$\times 10^{9}$	s^{-1}
Velocità della luce nel vuoto	c	$2.997\,924\,58$	$\times 10^{8}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Costante di Planck	h	$6.626\,070\,15$	$\times 10^{-34}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
Carica elementare	e	$1.602\,176\,634$	$\times 10^{-19}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Costante di Boltzmann	k_{B}	$1.380\,649$	$\times 10^{-23}$	$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Costante di Avogadro	N_{A}	$6.022\,140\,76$	$\times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficienza luminosa di una radiazione	K_{cd}	6.83	$\times 10^{2}$	$\mathrm{cd} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{3} \cdot \mathrm{sr}$
Costante magnetica	μ_0	$1.256\,637\,062\,12(19)$	$\times 10^{-6}$	$\mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Costante elettrica	ε_0	$8.854\,187\,812\,8(13)$	$\times 10^{-12}$	$\mathrm{A}^{2} \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{s}^{4}$
Costante dei gas	R	$8.314\,462\,618...$		$\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.670\,374\,419...$	$\times 10^{-8}$	$\mathrm{K}^{-4} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Costante gravitazionale	G	$6.674\,30(15)$	$\times 10^{-11}$	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{3} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Massa dell'elettrone	m_{e}	$9.109\,383\,701\,5(28)$	$\times 10^{-31}$	kg
Massa del protone	m_{n}	$1.674\,927\,498\,04(95)$	$\times 10^{-27}$	kg
Massa del neutrone	m_{p}	$1.672\,621\,923\,69(51)$	$\times 10^{-27}$	kg
Accelerazione di gravità standard	g_{n}	$9.806\,65$		$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

Multiple Choice

Durata: 60 minuti
Punteggio: 21 punti (1 punto per ogni risposta corretta)

- Le domande a risposta multipla **(MC)** hanno diverse possibilità di risposta, di cui **esattamente una** è corretta. Se crocettate l'affermazione giusta (e solo quella) sul foglio risposte, otterrete un punto, altrimenti zero.

Domanda 1.1 (MC)

Se la popolazione mondiale fosse distribuita uniformemente sulle terre emerse del nostro pianeta, quale sarebbe l'area a disposizione di ogni persona?

A) $1.8 \times 10^4\,\mathrm{m}^2$ B) $1.8 \times 10^6\,\mathrm{m}^2$
C) $1.8 \times 10^8\,\mathrm{m}^2$ D) $1.8 \times 10^{10}\,\mathrm{m}^2$

Domanda 1.2 (MC)

Qual è la differenza di energia tra un elettrone con spin-up e uno con spin-down?

A) $E = \frac{e}{m_e}\hbar^2 B$ B) $E = \frac{e}{m_e}\hbar B$
C) $E = \frac{e^2}{m_e}\hbar B$ D) $E = \frac{e^2}{m_e^2}\hbar B$
E) $E = \frac{e^2}{m_e}\hbar^2 B$

Domanda 1.3 (MC)

Dato il vettore $\vec{a} \neq \vec{0}$, quale equazione è corretta?

A) $(\vec{a} + \vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ B) $(\vec{a} + \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{0}$
C) $(\vec{a} + \vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$ D) $(\vec{a} \times \vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
E) $(\vec{a} \cdot \vec{a})\,\vec{a} = \vec{0}$

Domanda 1.4 (MC)

Se la Terra ruotasse più velocemente su se stessa, l'orbita geostazionaria sarebbe...

A) più bassa. B) inalterata.
C) più alta.

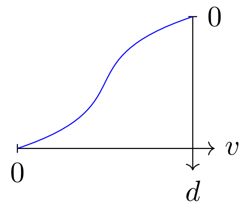
Domanda 1.5 (MC)

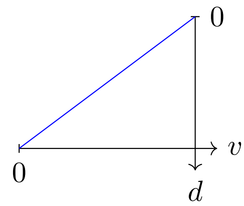
Asterix e Obelix decidono di giocare a bocce con dei menhir. Obelix (come al solito molto forte) lancia il menhir lontano da sè con una velocità di $100\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ e un angolo di $45°$ rispetto all'orizzonte. Il menhir ha una massa di $100\,\mathrm{kg}$. Asterix ha calcolato l'altezza massima del menhir durante il suo volo. Quale valore ha trovato?

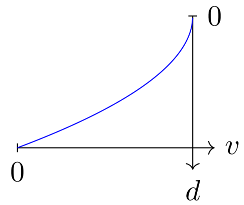
A) $25\,\mathrm{m}$ B) $255\,\mathrm{m}$
C) $500\,\mathrm{m}$ D) $980\,\mathrm{m}$
E) Il menhir raggiunge la Luna.

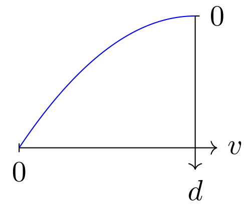
Domanda 1.6 (MC)

Cloé misura la velocità v dell'acqua in un fiume di larghezza infinita a diverse profondità d. Qual è il profilo di velocità che probabilmente osserverà?

A)


B)


C)


D)


Domanda 1.7 (MC)

Una palla colpisce elasticamente un'altra palla di uguale massa e inizialmente a riposo. La velocità finale della seconda palla è la metà della velocità iniziale della prima palla. Qual è l'angolo tra la velocità finale della seconda palla e la velocità iniziale della prima palla?

A) 0° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

Domanda 1.8 (MC)

Un muro si muove verso sinistra ad una velocità costante u. Una palla si muove verso destra in direzione del muro ad una velocità v. Qual è la velocità della palla dopo l'urto elastico?

A) v verso sinistra

B) u verso sinistra

C) $v + u$ verso sinistra

D) $v + 2u$ verso sinistra

E) $v + \frac{u}{2}$ verso sinistra

Domanda 1.9 (MC)

Due masse puntiformi m e M sono a distanza R una dall'altra. M è fissata sul posto e m è inizialmente a riposo. m è poi attratta verso M tramite la forza gravitazionale. Quanto tempo occorre attendere perché m colpisca M?

A) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{8GM}}$ B) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{2GM}}$ C) $\sqrt{\frac{\pi^2 R^3}{GM}}$

D) $\sqrt{\frac{2\pi^2 R^3}{GM}}$ E) $\sqrt{\frac{8\pi^2 R^3}{GM}}$

Domanda 1.10 (MC)

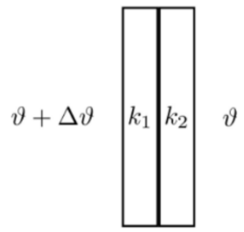
Il calorimetro a ghiaccio è un apparecchio per determinare il calore specifico di una sostanza. In pratica, la sostanza da analizzare viene riscaldata e collocata su un blocco di ghiaccio alla temperatura di 0 °C. Si misura poi la quantità di acqua fusa. Eseguiamo ora questo esperimento con un campione di piombo di 100 g riscaldato a 50 °C e misuriamo 1.93 g di acqua fusa. Qual è il calore specifico del piombo? Il calore di fusione dell'acqua è pari a $333.7\,\mathrm{J \cdot g^{-1}}$.

A) $0.129\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$ B) $0.775\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$

C) $1.29\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$ D) $7.75\,\mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$

Domanda 1.11 (MC)

Due piastre hanno ognuna la superficie di $1\,\mathrm{m^2}$ e sono spesse 1 cm. Esse hanno le conducibilità termiche $k_1 = 0.7\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ e $k_2 = 1.0\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Quanto è grande il flusso di calore attraverso le piastre con una differenza di temperatura $\Delta\vartheta = 10\,\mathrm{K}$, se vengono messe a contatto?

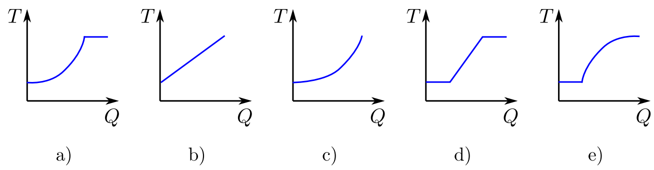


A) 0.21 W B) 4.1 W C) 0.41 kW

D) 1.7 kW E) 21 kW

Domanda 1.12 (MC)

Un miscuglio di acqua e ghiaccio viene riscaldato. Quale grafico descrive al meglio la relazione tra la temperatura T del sistema e il calore fornito Q?



A) a B) b C) c D) d E) e

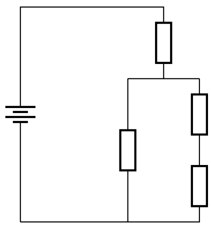
Domanda 1.13 (MC)

Alice ha recentemente sentito parlare del numero aureo φ. Ricorda di aver imparato che è possibile scrivere φ come una frazione continua:

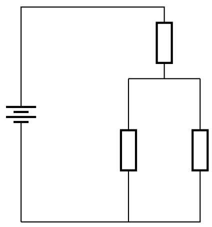
$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}}.$$

Si rende conto che potrebbe usare dei resistori con esattamente $R = 1\,\Omega$ per costruire un circuito con una resistenza equivalente che approssimi arbitrariamente bene il rapporto aureo. Tuttavia, non ha un numero infinito di resistori. Quale dei seguenti circuiti dovrebbe costruire per ottenere la resistenza totale più vicina possibile a $\varphi\Omega$?

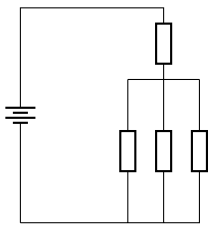
A)



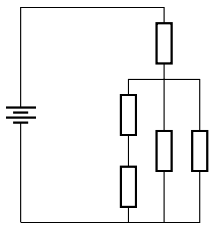
B)



C)

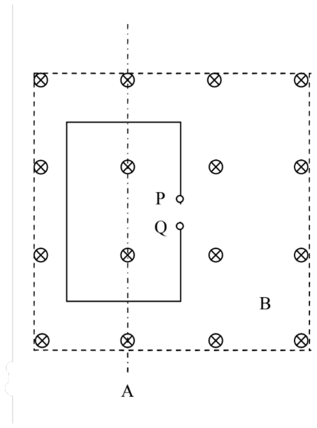


D)



Domanda 1.14 (MC)

Si ha un campo magnetico B in direzione perpendicolare rispetto al piano in cui si ritrova una maglia conduttrice rettangolare (vedi schizzo). Il campo magnetico B è generato da una bobina percorsa da una corrente I.



Quale delle seguenti risposte risulta sbagliata? Nella maglia rettangolare si induce una tensione, quando

A) viene fatta rotare attorno all'asse A.

B) viene fatta rotare attorno all'asse A e si collegano i poli P e Q.

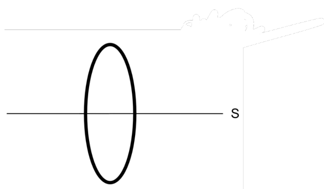
C) la corrente I viene lentamente diminuita.

D) si sposta la maglia di un terzo della sua larghezza verso destra.

E) viene fatto cambiare il flusso magnetico traversante la maglia.

Domanda 1.15 (MC)

Una carica di $3.25\,\mu\mathrm{C}$ distribuita uniformemente su di un anello (toro) di raggio $7.5\,\mathrm{cm}$ e di sezione trascurabile. Il campo elettrico, sull'asse di simmetria S ad una distanza di $1.2\,\mathrm{cm}$ dal centro dell'anello, risulta

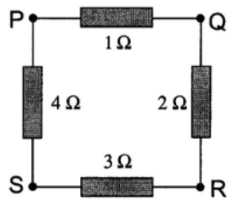


A) $52\,\mathrm{mN}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ B) $80\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ C) $27\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{C}^{-1}$

D) $85\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ E) $8\times10^{5}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$

Domanda 1.16 (MC)

Quattro resistori sono collegati secondo lo schizzo. Tra quale paia di punti la resistenza risulta massima.

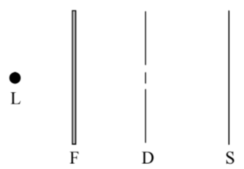


A) P e Q B) Q e S C) R e S

D) S e P E) P e R

Domanda 1.17 (MC)

Nello schizzo accanto, non in scala, è rappresentato un esperimento di interferenza con una doppia fenditura. La sorgente luminosa emette luce bianca ed il filtro verde (F) assorbe tutto eccetto il contributo verde. La luce filtrata incide sulla doppia fenditura D e genera sullo schermo S una figura di interferenza composta da righe chiare e scure quasi equidistanti.



Quali delle seguenti azioni ha per conseguenza la riduzione delle distanze tra le righe?

1. Il filtro verde viene sostituito da un filtro blu.
2. La doppia fenditura viene sostituita da un'altra con distanza maggiore tra le fenditure.
3. Viene impiegata una sorgente luminosa più intensa.

A) Tutte e tre B) Solo 1 e 2

C) Solo 2 e 3 D) Solo 1

E) Solo 3

Domanda 1.18 (MC)

Le cefeidi sono stelle particolari che mostrano una variazione periodica della loro luminosità. La luminosità assoluta può essere dedotta dalla durata del periodo. Disponi di una fotocamera con la quale puoi misurare l'intensità della luminosità (apparente) delle stelle. Fotografi due cefeidi A e B e constati che l'intensità misurata della cefeide B è 18 volte più debole di quella della cefeide A. Dal periodo della variazione di luminosità sai anche che la cefeide A ha una luminosità assoluta doppia rispetto alla cefeide B. Quanto è più lontana la cefeide B rispetto alla cefeide A?

A) 3 volte più lontana

B) 6 volte più lontana

C) 9 volte più lontana

D) 18 volte più lontana

E) 36 volte più lontana

Domanda 1.19 (MC)

Come si può aumentare la quantità di fotoni ricevuti da un telescopio?

A) Usando un telescopio con uno specchio primario più grande.

B) Usando un telescopio con uno specchio secondario più grande.

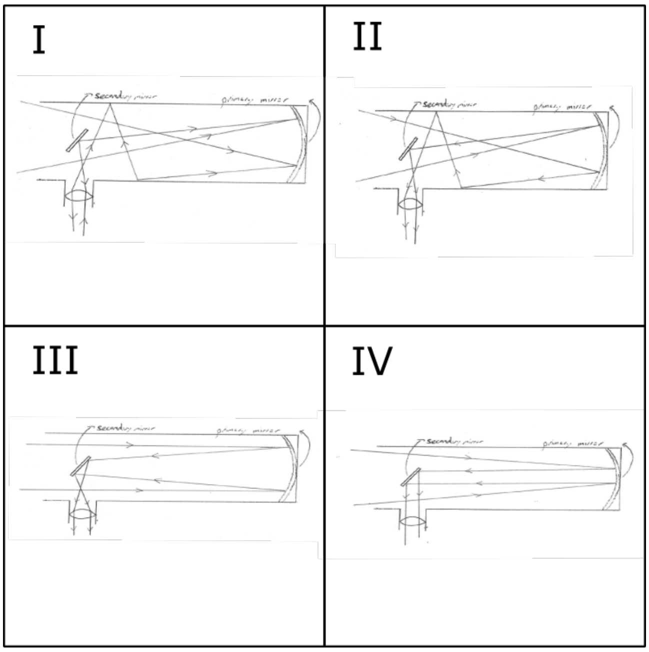
C) Usando un telescopio con un oculare più grande.

D) Collegando direttamente una fotocamera sensibile invece di utilizzare un oculare.

E) Filtrando la luce rossa e conservando solo i fotoni blu ad alta energia.

Domanda 1.20 (MC)

Considera un telescopio. Quale dei seguenti cammini ottici è possibile?



A) I B) II C) III D) IV

Domanda 1.21 (MC)

Emmy tiene un cucchiaio con il braccio teso e osserva il suo riflesso nella superficie interna ed esterna del cucchiaio. Nel farlo, si accorge di quanto segue:

A) I riflessi all'interno e all'esterno sono invertiti (capovolti).

B) Il riflesso all'interno è invertito e quello all'esterno no.

C) Il riflesso all'esterno è invertito e quello all'interno no.

D) I riflessi all'interno e all'esterno non sono invertiti.

Multiple Choice: foglio risposte

Riportate le vostre risposte nelle caselle previste su questa pagina.

Cognome:	Nome:	Totale:

	A	B	C	D	E
Domanda 1.1	☐	☐	☐	☐	
Domanda 1.2	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.3	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.4	☐	☐	☐		
Domanda 1.5	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.6	☐	☐	☐	☐	
Domanda 1.7	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.8	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.9	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.10	☐	☐	☐	☐	
Domanda 1.11	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.12	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.13	☐	☐	☐	☐	
Domanda 1.14	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.15	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.16	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.17	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.18	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.19	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 1.20	☐	☐	☐	☐	
Domanda 1.21	☐	☐	☐	☐	

Multiple Choice: soluzioni

	A	B	C	D	E
Domanda 1.1	■	□	□	□	
Domanda 1.2	□	■	□	□	□
Domanda 1.3	□	■	□	□	□
Domanda 1.4	■	□	□		
Domanda 1.5	□	■	□	□	□
Domanda 1.6	□	□	■	□	
Domanda 1.7	□	□	□	■	□
Domanda 1.8	□	□	□	■	□
Domanda 1.9	■	□	□	□	□
Domanda 1.10	■	□	□	□	
Domanda 1.11	□	□	■	□	□
Domanda 1.12	□	□	□	■	□
Domanda 1.13	■	□	□	□	
Domanda 1.14	□	□	□	■	□
Domanda 1.15	□	□	□	□	■
Domanda 1.16	□	■	□	□	□
Domanda 1.17	□	■	□	□	□
Domanda 1.18	■	□	□	□	□
Domanda 1.19	■	□	□	□	□
Domanda 1.20	□	□	■	□	
Domanda 1.21	□	■	□	□	

Problemi lunghi

Durata: 120 minuti
Punteggio: 48 punti (3×16)

Cominciate ogni problema su un nuovo foglio, al fine di facilitarne la correzione.

Indicazione generale: i problemi sono composti da parti parzialmente indipendenti. In caso di blocco, si consiglia di continuare a leggere e di fare le parti più facili.

Problema lungo 2.1: Effetto magnus *(16 punti)*

Gli oggetti volanti in rotazione vengono deviati dalla loro traiettoria balistica a causa dell'interazione con l'aria circostante. In questo esercizio esaminiamo da più vicino questo effetto, che prende il nome dal fisico Heinrich Magnus. A tale scopo, nella parte A. elaboriamo un semplice modello per spiegare l'effetto e nella parte B. applichiamo i risultati ottenuti a un esempio.

Parte A. Effetto Magnus *(9 punti)*

In questa parte consideriamo un cilindro di altezza h e raggio R. Il cilindro ruota attorno al proprio asse con una velocità angolare ω e il suo centro di massa si muove con una velocità v_B. Per la parte A. usiamo il sistema inerziale che si muove assieme al cilindro a una velocità v_B (vedi schizzo).

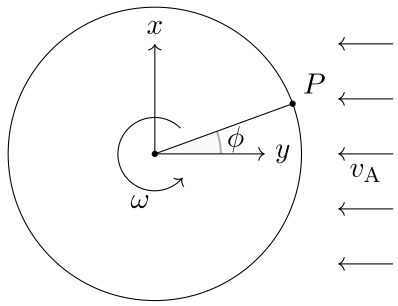


Figura A.1: Cilindro dal punto di vista del sistema inerziale in movimento

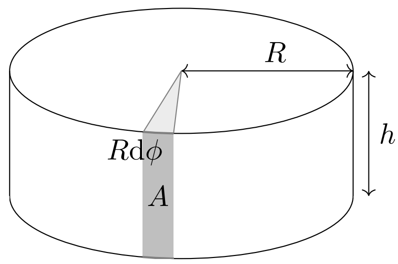
i. (1 pt) Quali sono le componenti v_x e v_y della velocità del punto P sulla superficie laterale del cilindro in funzione di ω, R e dell'angolo ϕ?

ii. (0.5 pt) Qual è la velocità $\vec{v}_\mathrm{A}$ dell'aria lontano davanti al cilindro?

Lo strato d'aria sulla superficie laterale del cilindro viene trascinata dal cilindro in rotazione. Pertanto, assumiamo che la velocità dell'aria nel punto P sia uguale alla somma della velocità $\vec{v}_\mathrm{A}$ e della velocità $\vec{v}_P$ del punto P sul cilindro.

iii. (3 pt) Assumi che la pressione nel punto $P_0 = (R, 0)$ sia p_0. Usa l'equazione di Bernoulli per trovare la pressione in qualsiasi punto P sulla superficie laterale del cilindro in funzione di v_B, dell'angolo ϕ, ω e R.

Consideriamo ora un elemento della superficie laterale del cilindro.



iv. (1.5 pt) Calcola le componenti x e y della forza agente sulla superficie A con lati di lunghezza $R\mathrm{d}\phi$ e altezza h.

v. (1 pt) In quale direzione punta la forza totale agente sul cilindro? Un'argomentazione senza calcoli è sufficiente.

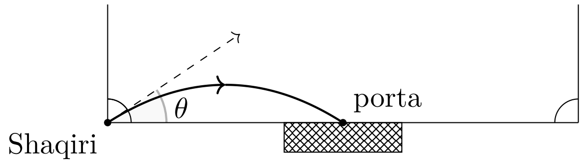
vi. (2 pt) A quanto ammonta questa forza?
Suggerimento: $\int_0^{2\pi} \sin(\phi)^2 \,\mathrm{d}\phi = \pi$

Parte B. Traiettoria *(7 punti)*

In questa parte applichiamo l'effetto Magnus alla traiettoria di un pallone da calcio. Per questo abbiamo bisogno della forza dell'effetto Magnus nel caso di un pallone che vola con una velocità $\vec{v}$ e ruota con una velocità angolare ω

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{A} \left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right),$$

dove ρ_A indica la densità dell'aria ($1.2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) e R il raggio del pallone. Inoltre, per questo esercizio assumiamo che un pallone da calcio pesi $420\,\mathrm{g}$ e abbia un raggio di $11\,\mathrm{cm}$. La distanza dalla bandierina del calcio d'angolo al centro della porta è $L = 23\,\mathrm{m}$. Shaqiri vuole segnare un gol dalla bandierina del calcio d'angolo. Calcia il pallone in modo che l'asse di rotazione sia sempre perpendicolare al terreno.



i. (2 pt) Quali forme descrivono le componenti orizzontali e verticali della traiettoria della palla?

ii. (2.5 pt) Shaqiri calcia il pallone con una velocità di rotazione di 10 giri al secondo e una velocità orizzontale iniziale di $v_\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Con quale angolo θ rispetto alla linea di fondo deve calciare in modo che il pallone superi la linea di porta esattamente al centro della porta?

iii. (2.5 pt) A quale velocità verticale verso l'alto deve calciare il pallone in modo che colpisca di nuovo il terreno esattamente quando attraversa la linea di porta?

Problema lungo 2.2: Crisi energetica *(16 punti)*

In una piacevole giornata autunnale, Richard Feynman legge sul giornale che per il successivo inverno è prevista una carenza di combustibili fossili. Attualmente vive con Arline Greenbaum in un appartamento condiviso riscaldato a nafta. La coppia inizia a chiedersi come ridurre il consumo di nafta. In inverno, la temperatura esterna è $T_1 = 3\,°\mathrm{C}$ e loro desiderano che il loro appartamento sia mantenuto alla temperatura di $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, nel qual caso l'appartamento perde $P = 2000\,\mathrm{W}$ di calore che devono essere compensati. La nafta ha un potere calorifico di $H = 36\,\mathrm{MJ}\cdot\mathrm{L}^{-1}$. L'acqua ha una capacità termica di $c = 4.19\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ e un calore latente di solidificazione di $L = 333.7\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Parte A. Domande di riscaldamento *(4.5 punti)*

i. (1 pt) Stima il rendimento del riscaldamento dell'acqua sanitaria a nafta.

ii. (1 pt) Quanta acqua potrebbe essere riscaldata da T_2 a $T_3 = 80\,°\mathrm{C}$ con $1\,\mathrm{L}$ di nafta?

iii. (0.5 pt) Per quanto tempo possono mantenere la temperatura del loro appartamento con $1\,\mathrm{L}$ di nafta?

iv. (2 pt) Assumendo che l'appartamento perda calore solo tramite conduzione, quanta potenza risparmierebbero riducendo la temperatura dell'appartamento a $T_2' = 17\,°\mathrm{C}$?

Parte B. Altri sistemi di riscaldamento *(11.5 punti)*

Per motivi di comfort, non vogliono ridurre la temperatura. Invece considerano altri sistemi di riscaldamento e calcolano le risorse necessarie per mantenere la temperatura del loro appartamento.

i. (1 pt) Potrebbero acquistare una stufa elettrica. Di quanta potenza elettrica avrebbero bisogno?

In alternativa, potrebbero installare una pompa di calore che lavori tra due temperature diverse $T_a \le T_b$, alimentata da un motore elettrico.

ii. (3 pt) Assumendo che la pompa di calore abbia il massimo rendimento teoricamente possibile, trova una relazione tra una quantità infinitesimale di lavoro fornito $\mathrm{d}W$ e una quantità infinitesimale di calore $\mathrm{d}Q_b$ trasferito al serbatoio a temperatura più alta.

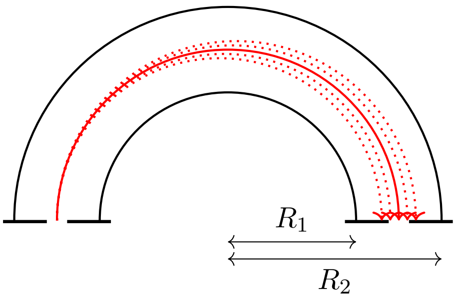
iii. (2 pt) Il modo più semplice di installare una pompa di calore è quello di farla funzionare tra l'aria esterna e quella dell'appartamento. Quale sarebbe la potenza elettrica minima teoreticamente necessaria in questo caso? Puoi assumere che il motore elettrico abbia un'efficienza pari al $100\,\%$, poiché la maggior parte delle sue perdite di energia contribuisce direttamente alla temperatura dell'appartamento.

iv. (4.5 pt) Richard pensa poi al loro congelatore, che funziona anch'esso come una pompa di calore. Si rende conto che potrebbe prendere l'acqua del rubinetto (che entra in casa alla temperatura di T_2), metterla in un contenitore nel congelatore e, non appena congelata, gettare il ghiaccio ottenuto fuori dalla finestra e ripetere il processo. Quale sarebbe in questo caso la potenza elettrica media minima teoreticamente necessaria e quanta acqua sarebbe necessaria in media all'ora? Assumi nuovamente che il motore elettrico della pompa del congelatore abbia un'efficienza pari al $100\,\%$ e che l'apertura della finestra per gettare il ghiaccio non influisca sulla temperatura dell'appartamento, né che il ghiaccio gettato influisca sulla temperatura esterna.
Suggerimento: considera una massa m di acqua in ingresso e considera inizialmente il processo di abbassamento della temperatura dell'acqua e il processo di congelamento separatamente. In seguito assumi che entrambi i processi avvengano in un intervallo di tempo Δt per ottenere i valori medi.

v. (1 pt) Improvvisamente suona il campanello. Marie fa visita ad Arline e Richard e porta loro la tanto promessa cyclette da casa. Arline e Richard potrebbero generare il calore necessario semplicemente allenandosi a sufficienza?

Problema lungo 2.3: Analizzatore emisferico *(16 punti)*

La spettroscopia fotoelettronica esamina le proprietà elettriche di solidi proiettando della luce sul materiale in questione e determinando l'energia degli elettroni emessi. Per misurare l'energia degli elettroni si utilizza un analizzatore emisferico (vedi schizzo). Il principio alla base della misurazione è che un elettrone viene deviato dal campo elettrico tra due emisferi conduttori in modo diverso a dipendenza della sua energia cinetica. In altre parole, la determinazione della posizione dell'elettrone dopo il passaggio attraverso l'analizzatore emisferico permette di determinare la sua energia cinetica iniziale. Vogliamo ora scoprire più in dettaglio come questo funziona.



Parte A. Campo elettrico *(7 punti)*

In questa sezione vogliamo calcolare il campo elettrico tra i due emisferi. Assumiamo che il campo elettrico tra gli emisferi sia quello che si avrebbe tra due sfere concentriche di raggi R_1 e R_2.

i. (1 pt) Assumiamo che la superficie della sfera interna di raggio R_1 abbia una carica Q_1. Qual è il campo elettrico causato da questa carica nello spazio tra le due sfere, in funzione del raggio r?

ii. (1 pt) Sulla grande sfera di raggio R_2 si trova una carica Q_2. Qual è il campo elettrico causato da questa carica nello spazio tra le due sfere, in funzione del raggio r?

iii. (1 pt) Qual è il potenziale elettrico tra le due sfere in funzione di r, Q_1 e Q_2? Puoi scegliere liberamente il riferimento $V = 0$ per il potenziale.

iv. (3 pt) In laboratorio non possiamo intervenire direttamente sulle cariche Q_1 e Q_2, ma solo sui potenziali V_1 e V_2 delle due sfere. Esprimi il potenziale in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e r.

v. (1 pt) Qual è la magnitudine del campo elettrico in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e r?

Parte B. Orbita degli elettroni *(9 punti)*

Assumiamo che gli elettroni entrino nell'analizzatore emisferico a un raggio $R_\mathrm{i} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ con una velocità perpendicolare all'apertura.

i. (2.5 pt) Quale energia cinetica $E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$ deve avere un elettrone affinché segua un'orbita circolare? Esprimi il risultato in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e della carica elementare e.

ii. (1 pt) Consideriamo ora gli elettroni con una energia cinetica di $E_\mathrm{kin} \neq E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$. Qual è la forma geometrica della loro traiettoria all'interno dell'analizzatore?

iii. (5.5 pt) Determina il raggio R_f di un elettrone all'uscita dell'analizzatore emisferico in funzione della sua energia cinetica all'ingresso E_kin, dell'energia di passaggio $E^\mathrm{p}_\mathrm{kin}$ e di R_i. *Suggerimento: utilizza la conservazione del momento angolare e la conservazione dell'energia.*

Problemi lunghi: soluzioni

Problema lungo 2.1: Effetto magnus *16*

Gli oggetti volanti in rotazione vengono deviati dalla loro traiettoria balistica a causa dell'interazione con l'aria circostante. In questo esercizio esaminiamo da più vicino questo effetto, che prende il nome dal fisico Heinrich Magnus. A tale scopo, nella parte A. elaboriamo un semplice modello per spiegare l'effetto e nella parte B. applichiamo i risultati ottenuti a un esempio.

Parte A. Effetto Magnus 9

In questa parte consideriamo un cilindro di altezza h e raggio R. Il cilindro ruota attorno al proprio asse con una velocità angolare ω e il suo centro di massa si muove con una velocità $v_{\mathbf{B}}$. Per la parte A. usiamo il sistema inerziale che si muove assieme al cilindro a una velocità $v_{\mathbf{B}}$ (vedi schizzo).

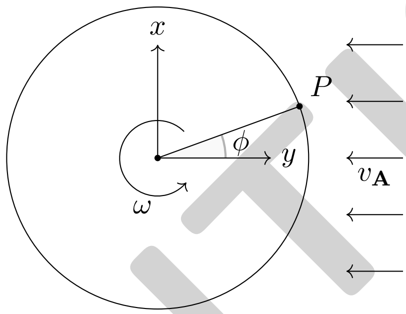


Figura A.1: Cilindro dal punto di vista del sistema inerziale in movimento

i. Quali sono le componenti v_x e v_y della velocità del punto P sulla superficie laterale del cilindro in funzione di ω, R e dell'angolo ϕ? *1*

$$v_x = -\sin(\phi)\,\omega R$$

0.5

$$v_y = \cos(\phi)\,\omega R$$

0.5

ii. Qual è la velocità $\vec{v}_{\mathbf{A}}$ dell'aria lontano davanti al cilindro? *0.5*

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} = (-v_{\mathrm{B}}, 0)$$

0.5

Lo strato d'aria sulla superficie laterale del cilindro viene trascinata dal cilindro in rotazione. Pertanto, assumiamo che la velocità dell'aria nel punto P sia uguale alla somma della velocità $\vec{v}_{\mathbf{A}}$ e della velocità $\vec{v}_P$ del punto P sul cilindro.

iii. Assumi che la pressione nel punto $P_0 = (R, 0)$ sia p_0. Usa l'equazione di Bernoulli per trovare la pressione in qualsiasi punto P sulla superficie laterale del cilindro in funzione di $v_\mathbf{B}$, dell'angolo ϕ, ω e R. ***3***

The velocity of the air around the cylinder is

$$(v_x, v_y) = (-v_\mathrm{B} - \sin(\phi)\,\omega R, \cos(\phi)\,\omega R)\,.$$

0.5

The Bernoulli equation reads as

$$\frac{1}{2}\rho_\mathrm{A} v_0^2 + p_0 = \frac{1}{2}\rho_\mathrm{A}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + p(\phi)\,,$$

where we neglected the hydrostatic pressure. 1

With the previous result the velocities can be expanded

$$v_0^2 = v_\mathrm{B}^2 + (\omega R)^2$$

0.5

$$v_x^2 + v_y^2 = v_\mathrm{B}^2 + (\omega R)^2 + 2\sin(\phi)\,v_\mathrm{B}\omega R$$

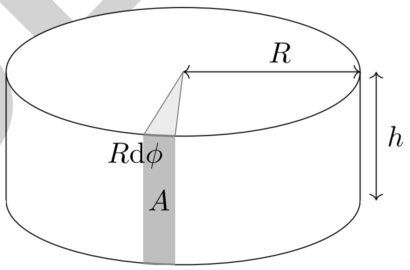
0.5

Putting all things together we get

$$p(\phi) = p_0 - \sin(\phi)\,v_\mathrm{B}\omega R \rho_\mathrm{A}.$$

0.5

Consideriamo ora un elemento della superficie laterale del cilindro.



iv. Calcola le componenti x e y della forza agente sulla superficie A con lati di lunghezza $R\mathrm{d}\phi$ e altezza h. ***1.5***

The total force is given by

$$F = pA.$$

0.5

Therefore we get

$$F_x = -F\cos(\phi) = -\left(p_0 - \rho_\mathrm{A}\sin(\phi)\, v_\mathrm{B}\omega R\right)\cos(\phi)\, Rh\mathrm{d}\phi$$

0.5

and

$$F_y = -F\sin(\phi) = -\left(p_0 - \rho_\mathrm{A}\sin(\phi)\, v_\mathrm{B}\omega R\right)\sin(\phi)\, Rh\mathrm{d}\phi.$$

0.5

v. In quale direzione punta la forza totale agente sul cilindro? Un'argomentazione senza calcoli è sufficiente. ***1***

If we consider the two points (x, y) and $(-x, y)$ the x component of the pressure force is the same in magnitude but the opposite in direction. Therefore the x component is zero. 0.5

Since the pressure on the upper side of the cylinder (positive y values) is lower the than on the lower side, the force will point in positive y-direction. 0.5

vi. A quanto ammonta questa forza?
Suggerimento: $\int_0^{2\pi} \sin(\phi)^2\, \mathrm{d}\phi = \pi$ ***2***

From the argument above we only have to consider the y component of the force. We get the total force by integration:

$$F = \int_0^{2\pi} F_y \mathrm{d}\phi = -\int_0^{2\pi} \left(p_0 - 2\sin(\phi)\, v_\mathrm{B}\omega R\right)\sin(\phi)\, Rh\mathrm{d}\phi.$$

0.5

The term proportional to the sine becomes zero:

$$-\int_0^{2\pi} p_0 \sin(\phi)\, Rh\mathrm{d}\phi = 0.$$

0.5

And for the other term we can use the hint to get

$$F = \int_0^{2\pi} F_y \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \rho_\mathrm{A}\sin(\phi)^2\, v_\mathrm{B}\omega R^2 h\mathrm{d}\phi = v_\mathrm{B}\omega\pi R^2 h = \omega v_\mathrm{B} V_\mathrm{cylinder}\rho_\mathrm{A}.$$

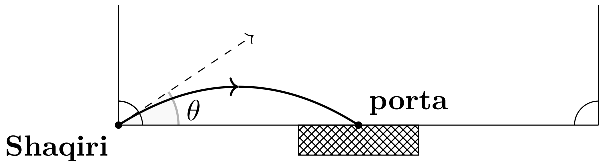
1

Parte B. Traiettoria *7*

In questa parte applichiamo l'effetto Magnus alla traiettoria di un pallone da calcio. Per questo abbiamo bisogno della forza dell'effetto Magnus nel caso di un pallone che vola con una velocità $\vec{v}$ e ruota con una velocità angolare ω

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathbf{A}\left(\vec{v}\times\vec{\omega}\right),$$

dove $\rho_\mathbf{A}$ indica la densità dell'aria ($1.2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$) e R il raggio del pallone. Inoltre, per questo esercizio assumiamo che un pallone da calcio pesi $420\,\mathrm{g}$ e abbia un raggio di $11\,\mathrm{cm}$. La distanza dalla bandierina del calcio d'angolo al centro della porta è $L = 23\,\mathrm{m}$. Shaqiri vuole segnare un gol dalla bandierina del calcio d'angolo. Calcia il pallone in modo che l'asse di rotazione sia sempre perpendicolare al terreno.



i. Quali forme descrivono le componenti orizzontali e verticali della traiettoria della palla? ***2***

The two components can be considered independently, because the rotation is along the vertical axis and is therefore only affecting the horizontal movement. 0.5

For the horizontal movement we just have the force from the Magnus-effect, which has the same form as the Lorenz force, therefore we expect that the ball moves on a circular trajectory. 1

For the vertical movement only gravity plays a role, therefore we get a parabola. 0.5

ii. Shaqiri calcia il pallone con una velocità di rotazione di 10 giri al secondo e una velocità orizzontale iniziale di $v_\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Con quale angolo θ rispetto alla linea di fondo deve calciare in modo che il pallone superi la linea di porta esattamente al centro della porta? ***2.5***

The magnus force contributes the centripetal force thereby we have the condition

$$\frac{m_\mathrm{B} v_\mathrm{h}^2}{R_\mathrm{f}} = m_\mathrm{A} v_\mathrm{h} \omega,$$

where ω is the angular velocity of the ball's rotation and R_f the radius of the trajectory. 0.5

Solving for R_f gives

$$R_\mathrm{f} = \frac{m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}} \frac{v_\mathrm{h}}{\omega}.$$

0.5

The opening angle ϕ of the arc describing the ball's trajectory needs to fullfil the condition

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) R_\mathrm{f} = \frac{L}{2}.$$

0.5

Shaqiri needs to aim at half of this opening angle, therefore

$$\theta = \arcsin\left(\frac{L}{2R_\mathrm{f}}\right) = \arcsin\left(\frac{L\omega}{2v_\mathrm{h}} \frac{m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{B}}\right).$$

0.5

The numerical answer is 31.2° (the radius is 22 m). 0.5

iii. A quale velocità verticale verso l'alto deve calciare il pallone in modo che colpisca di nuovo il terreno esattamente quando attraversa la linea di porta? ***2.5***

Let $v_{p,0}$ the initial vertical velocity of the ball then the vertical velocity of the ball in dependence on time is

$$v_p(t) = v_{p,0} + gt.$$

0.5

When the ball hits the ground it has a velocity of $-v_{p,0}$, 0.5

which means $v_{p,0} = \frac{gT}{2}$, where T is the time it takes the Ball to hit the goal. 0.5

The time T can be obtained from the previous task

$$T = \frac{2\theta R}{v_\mathrm{h}}.$$

0.5

The numerical answer is $v_{p,0} = 5.33\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ ($T = 1.09\,\mathrm{s}$). 0.5

Problema lungo 2.2: Crisi energetica 16

In una piacevole giornata autunnale, Richard Feynman legge sul giornale che per il successivo inverno è prevista una carenza di combustibili fossili. Attualmente vive con Arline Greenbaum in un appartamento condiviso riscaldato a nafta. La coppia inizia a chiedersi come ridurre il consumo di nafta. In inverno, la temperatura esterna è $T_1 = 3\,°\mathrm{C}$ e loro desiderano che il loro appartamento sia mantenuto alla temperatura di $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$, nel qual caso l'appartamento perde $P = 2000\,\mathrm{W}$ di calore che devono essere compensati. La nafta ha un potere calorifico di $H = 36\,\mathrm{MJ \cdot L^{-1}}$. L'acqua ha una capacità termica di $c = 4.19\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ e un calore latente di solidificazione di $L = 333.7\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Parte A. Domande di riscaldamento 4.5

i. Stima il rendimento del riscaldamento dell'acqua sanitaria a nafta. *1*

The efficiency is close to 100 %, the only losses are through the walls of the furnace and/or boiler. However, the longer the time between the heating and the use of domestic hot water, the higher the losses. 80 % is a safe value. 1

ii. Quanta acqua potrebbe essere riscaldata da T_2 a $T_3 = 80\,°\mathrm{C}$ con $1\,\mathrm{L}$ di nafta? *1*

Heating water from T_2 to T_3 requires a heat of $c\,(T_3 - T_2)$ per unit mass. 0.5

So with $l = 1\,\mathrm{L}$ of fuel oil, one can heat a mass of water of $\frac{lH}{c(T_3 - T_2)} \approx 143\,\mathrm{kg}$, which also corresponds to $\approx 143\,\mathrm{L}$. Taking the efficiency into account, a value between $110\,\mathrm{L}$ and $143\,\mathrm{L}$ is considered correct. 0.5

iii. Per quanto tempo possono mantenere la temperatura del loro appartamento con $1\,\mathrm{L}$ di nafta? *0.5*

They can maintain it for $\frac{lH}{P} = 1.8 \times 10^4\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{h}$. 0.5

iv. Assumendo che l'appartamento perda calore solo tramite conduzione, quanta potenza risparmierebbero riducendo la temperatura dell'appartamento a $T_2' = 17\,°\mathrm{C}$? *2*

Heat transfer through conduction is proportional to the temperature difference. 1

Therefore the heat loss would be equal to $\frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1} P$. 0.5

The power saved is then $P - \frac{T_2' - T_1}{T_2 - T_1} P = \frac{T_2 - T_2'}{T_2 - T_1} P \approx 353\,\mathrm{W}$ or 18 %. 0.5

Parte B. Altri sistemi di riscaldamento 11.5

Per motivi di comfort, non vogliono ridurre la temperatura. Invece considerano altri sistemi di riscaldamento e calcolano le risorse necessarie per mantenere la temperatura del loro appartamento.

i. Potrebbero acquistare una stufa elettrica. Di quanta potenza elettrica avrebbero bisogno? *1*

Electric heaters have near-perfect efficiency, because what would be losses in other systems are the actual useful output. So they would need a power $P = 2000\,\mathrm{W}$. 1

In alternativa, potrebbero installare una pompa di calore che lavori tra due temperature diverse $T_a \leq T_b$, alimentata da un motore elettrico.

ii. Assumendo che la pompa di calore abbia il massimo rendimento teoricamente possibile, trova una relazione tra una quantità infinitesimale di lavoro fornito $\mathrm{d}W$ e una quantità infinitesimale di calore $\mathrm{d}Q_b$ trasferito al serbatoio a temperatura più alta. *3*

The ideal case corresponds to a Carnot cycle where the total entropy variation is null and the internal energy of the heat pump goes back to its initial value after each cycle. 1

To function, the pump requires the work $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_b - \mathrm{d}Q_a$ to be supplied, where $\mathrm{d}Q_a$ is taken positive (heat transferred from the lower temperature reservoir to the pump). 0.5

From entropy conservation, $\frac{\mathrm{d}Q_a}{T_a} = \frac{\mathrm{d}Q_b}{T_b}$. 0.5

Therefore, $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q_b - \mathrm{d}Q_b\frac{T_a}{T_b} = \mathrm{d}Q_b\frac{T_b - T_a}{T_b}$. 1

iii. Il modo più semplice di installare una pompa di calore è quello di farla funzionare tra l'aria esterna e quella dell'appartamento. Quale sarebbe la potenza elettrica minima teoreticamente necessaria in questo caso? Puoi assumere che il motore elettrico abbia un'efficienza pari al $100\,\%$, poiché la maggior parte delle sue perdite di energia contribuisce direttamente alla temperatura dell'appartamento. *2*

We can use the first formula derived previously, with $T_a = T_1$ and $T_b = T_2$. 0.5

Because the pump motor is assumed to have perfect efficiency, $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ is the required electric power. 0.5

We also have $P = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}$. 0.5

Therefore, $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = P\frac{T_2 - T_1}{T_2} \approx 116\,\mathrm{W}$. 0.5

iv. Richard pensa poi al loro congelatore, che funziona anch'esso come una pompa di calore. Si rende conto che potrebbe prendere l'acqua del rubinetto (che entra in casa alla temperatura di T_2), metterla in un contenitore nel congelatore e, non appena congelata, gettare il ghiaccio ottenuto fuori dalla finestra e ripetere il processo. Quale sarebbe in questo caso la potenza elettrica media minima teoreticamente necessaria e quanta acqua sarebbe necessaria in media all'ora? Assumi nuovamente che il motore elettrico della pompa del congelatore abbia un'efficienza pari al $100\,\%$ e che l'apertura della finestra per gettare il ghiaccio non influisca sulla temperatura dell'appartamento, né che il ghiaccio gettato influisca sulla temperatura esterna.
Suggerimento: considera una massa m di acqua in ingresso e considera inizialmente il processo di abbassamento della temperatura dell'acqua e il processo di congelamento separatamente. In seguito assumi che entrambi i processi avvengano in un intervallo di tempo Δt per ottenere i valori medi. *4.5*

In this case, the upper temperature remains fixed $T_b = T_2$, whereas the lower temperature T_a drops from T_2 to $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$, where water freezes.

When lowering the temperature, we have $\mathrm{d}Q_a = -cm\mathrm{d}T_a$. 0.5

Integrating it in temperature, we get

$$Q_{1,T_2\to T_0} = cm\int_{T_0}^{T_2} T\mathrm{d}T = cm\left(T_2 - T_0\right).$$

0.5

Integrating in temperature the entropy conservation equation, we get

$$Q_{2,T_2\to T_0} = cm\int_{T_0}^{T_2} \frac{T_2}{T}\mathrm{d}T = cmT_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right).$$

0.5

During freezing, we have $Q_{1,\text{freezing}} = mL$. 0.5

So $Q_{2,\text{freezing}} = Q_{1,\text{freezing}}\frac{T_2}{T_0} = mL\frac{T_2}{T_0}$. 0.5

In total, $Q_2 = cmT_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + mL\frac{T_2}{T_0}$ and $W = cm\left(T_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + T_0 - T_2\right) + mL\frac{T_2-T_0}{T_0}$. 0.5

The timespan Δt is such that $P = \frac{Q_2}{\Delta t}$. 0.5

Then

$$\frac{m}{\Delta t} = P\frac{1}{cT_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + L\frac{T_2}{T_0}} \approx 5.4\times 10^{-4}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1},$$

which is about $2.0\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. 0.5

And

$$\frac{W}{\Delta t} = P\left(1 - \frac{c\left(T_2 - T_0\right) + L}{cT_2\log\left(\frac{T_2}{T_0}\right) + L\frac{T_2}{T_0}}\right) \approx 135\,\mathrm{W}.$$

0.5

v. Improvvisamente suona il campanello. Marie fa visita ad Arline e Richard e porta loro la tanto promessa cyclette da casa. Arline e Richard potrebbero generare il calore necessario semplicemente allenandosi a sufficienza? ***1***

The daily food ration for an adult is around $10\,000\,\mathrm{kJ}$. 0.5

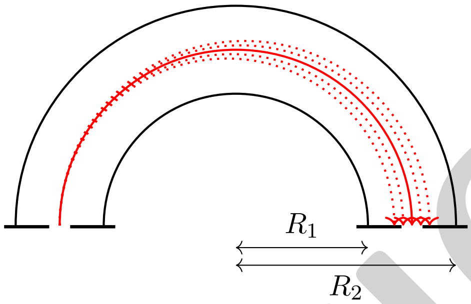
So even if Arline and Richard transformed all their food intake in heat, their combined power would be a mere

$$2\frac{10\,000\,\mathrm{kJ}}{3600\cdot 24\,\mathrm{s}} \approx 231\,\mathrm{W},$$

well below P. 0.5

Problema lungo 2.3: Analizzatore emisferico *16*

La spettroscopia fotoelettronica esamina le proprietà elettriche di solidi proiettando della luce sul materiale in questione e determinando l'energia degli elettroni emessi. Per misurare l'energia degli elettroni si utilizza un analizzatore emisferico (vedi schizzo). Il principio alla base della misurazione è che un elettrone viene deviato dal campo elettrico tra due emisferi conduttori in modo diverso a dipendenza della sua energia cinetica. In altre parole, la determinazione della posizione dell'elettrone dopo il passaggio attraverso l'analizzatore emisferico permette di determinare la sua energia cinetica iniziale. Vogliamo ora scoprire più in dettaglio come questo funziona.



Parte A. Campo elettrico *7*

In questa sezione vogliamo calcolare il campo elettrico tra i due emisferi. Assumiamo che il campo elettrico tra gli emisferi sia quello che si avrebbe tra due sfere concentriche di raggi R_1 e R_2.

i. Assumiamo che la superficie della sfera interna di raggio R_1 abbia una carica Q_1. Qual è il campo elettrico causato da questa carica nello spazio tra le due sfere, in funzione del raggio r? *1*

The electric field is

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

1

ii. Sulla grande sfera di raggio R_2 si trova una carica Q_2. Qual è il campo elettrico causato da questa carica nello spazio tra le due sfere, in funzione del raggio r? *1*

The electric field is $E(r) = 0$ 1

iii. Qual è il potenziale elettrico tra le due sfere in funzione di r, Q_1 e Q_2? Puoi scegliere liberamente il riferimento $V = 0$ per il potenziale. *1*

We integrate the total electric field with respect to r and get

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} + C_2$$

1

iv. In laboratorio non possiamo intervenire direttamente sulle cariche Q_1 e Q_2, ma solo sui potenziali V_1 e V_2 delle due sfere. Esprimi il potenziale in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e r. ***3***

We have the two boundary conditions

$$V_1 = V(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1} + C_2$$

0.5

$$V_2 = V(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_2} + C_2$$

0.5

This can be solved for

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}R_2R_1$$

1

and

$$C_2 = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}R_2 = \frac{V_2R_2 + V_1R_1}{R_2 - R_1}$$

1

v. Qual è la magnitudine del campo elettrico in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e r? ***1***

We take the derivative of the Potential with respect to r and get

$$|E(r)| = \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\frac{R_2R_1}{r^2}$$

1

Parte B. Orbita degli elettroni *9*

Assumiamo che gli elettroni entrino nell'analizzatore emisferico a un raggio $R_\mathrm{i} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ con una velocità perpendicolare all'apertura.

i. Quale energia cinetica $E_\mathrm{kin}^\mathrm{p}$ deve avere un elettrone affinché segua un'orbita circolare? Esprimi il risultato in funzione di V_1, V_2, R_1, R_2 e della carica elementare e. ***2.5***

The centripetal force required to put the electron on circular orbit is

$$F_\mathrm{c} = m_\mathrm{e}\frac{v_\mathrm{p}^2}{R_\mathrm{p}}$$

0.5

which has to be equal to electric force

$$eE(R_\mathrm{i}) = m_\mathrm{e}\frac{v_\mathrm{p}^2}{R_\mathrm{p}}$$

0.5

The electron kinetic energy is given by

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{p}}^2$$

0.5

Therefore we can solve E_{p}

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} e E(R_{\mathrm{i}})\, R_{\mathrm{i}} = -\frac{1}{2} e \frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1} \frac{R_2 R_1}{R_i} = e\,(V_2 - V_1)\,\frac{R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2}$$

1

ii. Consideriamo ora gli elettroni con una energia cinetica di $E_{\mathbf{kin}} \neq E_{\mathbf{kin}}^{\mathbf{p}}$. Qual è la forma geometrica della loro traiettoria all'interno dell'analizzatore? ***1***

We have the $1/r$ Potential as in the case of celestial orbits. Therefore we can use Kepler's laws and we get that the trajectory is shaped like an ellipse. 1

Note that the Perihel and the Aphel of the orbit are at the entry or at the exit of the analyzer.

iii. Determina il raggio $R_{\mathbf{f}}$ di un elettrone all'uscita dell'analizzatore emisferico in funzione della sua energia cinetica all'ingresso $E_{\mathbf{kin}}$, dell'energia di passaggio $E_{\mathbf{kin}}^{\mathbf{p}}$ e di $R_{\mathbf{i}}$. *Suggerimento: utilizza la conservazione del momento angolare e la conservazione dell'energia.* ***5.5***

Let v_{i} be the initial velocity at the entry and v_{f} the velocity at the exit. First we have to note that the orbit is perpendicular to the radius at the entry and therefore also has to be perpendicular at the exit. 1

Therefore angular momentum conservation reads as

$$m_{\mathrm{e}} R_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{i}} = m_{\mathrm{e}} R_{\mathrm{f}} v_{\mathrm{f}}$$

1

Similarly we can use the energy conservation condition

$$E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}} = E_{\mathrm{f}} + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{f}}}$$

1

From the angular momentum conservation we can express

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{R_{\mathrm{i}}^2}{R_{\mathrm{f}}^2} E$$

0.5

Therefore the energy conservation gives a quadratic equation in R_{f}

$$\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right) R_{\mathrm{f}}^2 - \alpha R_{\mathrm{f}} - R_{\mathrm{i}}^2 E = 0$$

0.5

The solution to this quadratic equation is

$$R_{\mathrm{f}} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4R_{\mathrm{i}}^2 E^2 + 4\alpha R_{\mathrm{i}} E}}{2\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right)} = \frac{\alpha \pm (\alpha + 2R_{\mathrm{i}} E)}{2\left(E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}\right)} = -R_{\mathrm{i}} \frac{E}{E + \frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}}}$$

0.5

The other solution with the minus just gives $R_f = R_i$, which corresponds to a full orbit.

From above we have $\frac{\alpha}{R_{\mathrm{i}}} = -eE(R_{\mathrm{i}})\, R_{\mathrm{i}} = -2E_{\mathrm{p}}$ 0.5

which gives the final result

$$R_{\mathrm{f}} = R_{\mathrm{i}} \frac{1}{2\frac{E_{\mathrm{p}}}{E} - 1}$$

0.5